

Théorème de Brouwer.

Théorème:

$f: B^n \rightarrow B^n$ continue. Alors f a un point fixe.

Dém * Supposons $f \in C^1$.

Lemme 1. il n'existe aucune appl $C^1 f: \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$ tq $\forall x \in S^{n-1}, f(x) = x$.

En effet, soit f une telle appl. Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ tq $\bar{\Omega}$ compact et $B^n \subset \Omega$.

On pose $v(x) = f(x) - x$. On applique Milnor avec $K = B^n, V = \mathbb{R}^n$,

$$v_t(x) = (1-t)x + tf(x).$$

$\exists \gamma \in]0, 1[$ tq si $|t| < \gamma$, v_t est un C^1 -difféo de Ω sur $v_t(\Omega)$.

Soit $x \in B^n$, $f(x) \in S^{n-1} \subset B^n$. B^n convexe donc $\forall t \in [0, 1]$,

$$(1-t)x + tf(x) \in B^n. \text{ Donc } v_t(B^n) \subset B^n.$$

En fait, $v_t(B^n) = B^n$.

En effet: soit $x \in S^{n-1}$. $f(x) = x$. Donc $v_t(x) = x$.

$$v_t|_{S^{n-1}} = \text{Id}_{S^{n-1}}.$$

$$\text{soit } x \in \overset{\circ}{B}^n. \|v_t(x)\| \leq (1-t)\|x\| + t\|f(x)\| < 1.$$

$$\text{Donc } v_t(\overset{\circ}{B}^n) \subset \overset{\circ}{B}^n$$

Reste à mq si $|t| < \gamma$, $v_t(\overset{\circ}{B}^n) = \overset{\circ}{B}^n$.

Or $v_t(\overset{\circ}{B}^n)$ est ouvert ds $\overset{\circ}{B}^n$ (par inversion locale).

Soit $y \in v_t(\overset{\circ}{B}^n)$. $x \in \overset{\circ}{B}^n$ tq $v_t(x) = y$.

TIL: $v_t: B(x, \epsilon) \rightarrow B(y, \epsilon) \subset \overset{\circ}{B}^n$ C^1 -difféo

$B(y, \epsilon)$ contient y et $B(y, \epsilon) \subset v_t(\overset{\circ}{B}^n)$

Il reste à mq $v_t(\overset{\circ}{B}^n)$ est fermé, par connexité on aura alors

$v_t(\overset{\circ}{B}^n) = \overset{\circ}{B}^n$. Soit $(x_j) \subset v_t(\overset{\circ}{B}^n)$ tq $x_j \rightarrow x \in \overset{\circ}{B}^n$.

$x_j = v_t(y_j)$. $y_j \in B^n$. $y \in B^n$ valeur d'adh.

$$v_t(y + \epsilon_j) \rightarrow v_t(y) \quad \text{Donc } x = v_t(y). \quad y \in \overset{\circ}{B}^n, \text{ sinon}$$

$$= x_{t(y)} \rightarrow x \quad x = v_t(y) = y \in S^{n-1} \text{ ab.}$$

Par Milnor, $\forall t \in [0, \delta[$, $\mu(B^n) = \int \det dv_t(x) dx$. (1)

$t \mapsto \int_{B^n} \det dv_t(x) dx - \mu(B^n)$ est polynomiale, et vaut 0

$\forall t < \delta$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mu(B^n) = \int \det dv_t(x) dx$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\|^2 = 1$, donc $\langle f(x), f(x) \rangle = 1$

D'où $2 \langle df_x(h), f(x) \rangle = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$

Donc $\text{Im } df_x \subset \underbrace{f(x)^\perp}_{\text{ex de dim } n-1} \Rightarrow df_x \text{ non inversible.}$

$v_t(x) = f(x)$. Donc $dv_t = df_x$ non inversible.

D'où $\int_{B^n} \det dv_t(x) dx = 0$ (e) (1) n'est pas vérifiée pour $t=1$.
Contradict°.

Soit $f \in C^1$ tq $\|f(x)\| < 1$. f a un pt fixe ds B^n .

Il suffit de mq f a un pt fixe ds $\mathbb{R}^n$. Comme $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathring{B}^n$, on aura ce pt fixe ds $\mathring{B}^n$.

Par l'abs, $\text{supp } f$ n'a pas de pt fixe ds $\mathbb{R}^n$.

Soit $\Delta_x = f(x) + \underbrace{\mathbb{R}_+^+}_{\neq 0} (x - f(x))$. $\forall x$, Δ_x coupe S^{n-1} en un unique pt $\pi(x)$.

Si on mq π est C^1 sur $\mathbb{R}^n$, et que $\pi|_{S^{n-1}} = \text{Id}_{S^{n-1}}$, ce qui précède nous donne une contradict° (la même).

On doit résoudre $\|f(x) + t(x - f(x))\|^2 = 1 \Rightarrow t(x) = \dots$

$\pi(x) = f(x) + t(x)(x - f(x)) \in C^1$. $\pi|_{S^{n-1}} = \text{Id}_{S^{n-1}}$ Ok.

* On suppose $f \in C^0$.

non détaillé [Par SW, soit $(f_k)_k$, $f_k \in C^1$, $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tq $f_k|_{B^n} \xrightarrow{U} f|_{B^n}$. Soit $g_k = \frac{f_k}{1 + \|f_k - f\|_\infty}$

$$g_k \in C^1, g_k|_{B^n}: B^n \rightarrow B^n, g_k \xrightarrow{U} f.$$

$\forall k$, Soit x_k un pt fixe de g_k de B^n .

Soit x une v.a de (x_k) . $x + p(k) \xrightarrow{k} x$.

$$x \in B^n.$$

$$g_{p(k)}(x_{p(k)}) \rightarrow f(x)$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ x_{p(k)} \end{array} \rightarrow x$$

$$\text{Donc } f(x) = x.$$