

101 – Groupes opérant sur un ensemble. E&A.

« Dis-moi sur qui tu agis, je te dirai quel groupe tu es. »

Un petit commentaire avant de commencer : Allelujah ! C'est la leçon sur laquelle je suis tombé à l'oral ! Damn it, je n'ai eu que 6.5, mais cette note est étroitement liée à ma faible performance devant les questions du jury.

C'est la leçon qu'il faut préparer. Petite remarque : dans la partie III, c'est impossible de tout faire tenir sur 3 pages, je donne juste une pléiade d'idées.

Le plan :

I) Définitions, premiers exemples.

Définition d'une action, définition équivalente. Définition d'orbite, de stabilisateur, d'action transitive, fidèle. Exemples d'actions qui marchent toujours : translation à gauche, conjugaison, action sur les classes modulo un sous-groupe distingué. Théorème de Cayley. Formule des classes.

II) Exemples d'actions de groupes finis

1) Action de G sur lui-même par conjugaison

Formules des classes dans ce cas. App : tout groupe d'ordre p^2 est abélien, th. de Wedderburn.

2) Action de G sur ses p-Sylow

Théorème de Sylow. App : A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60

3) Exemples du groupe symétrique

S_n opère sur $\{1, \dots, n\}$. Définition d'un cycle. Formule de conjugaison. Action de S_n sur $K[X_1, \dots, X_n]$. App : décomposition d'un polynôme semi-symétrique.

III) Actions et matrices

1) Multiplication à gauche

Présentation. Recherche d'un représentant « canonique » dans chaque orbite : ce sont les matrices échelonnées réduites. Intérêt : résolution des systèmes linéaires.

2) Equivalence

Présentation. Théorème du rang version action de groupes. Action de T^*T ou T est le groupe des matrices triangulaires supérieures de taille $n \times n$. App : décomposition de Bruhat.

3) Similitude

Présentation. Invariants de similitude. Sur les matrices diagonalisables. Sur les nilpotents. Tableaux de Young. Jordan.

4) Congruence

Présentation. Classification des formes quadratiques sur les complexes, sur les réels, sur les corps finis. App : Loi de réciprocité quadratique.

IV) Autres applications

1) Etude topologique

Groupe topologique. Théorème d'homéomorphisme. Exemple : étude topologique des orbites pour l'action par équivalence sur les matrices.

2) Sous-groupes finis de $SO(3)$

Théorème de classification. Groupes des isométries des polyèdres réguliers.

3) Isomorphismes exceptionnels

Groupes linéaires et autres sur des corps finis. $SU(2)/\{\pm 1\} \approx SO(3)$.

Les développements :

A17 : Décomposition de Bruhat

A19 : Topologie sur les orbites de l'action par équivalence.

A22 : \mathfrak{A}_5 est le seul groupe simple d'ordre 60.

A25 : Théorème de Wedderburn.

A26 : Décomposition des polynômes semi-symétriques.

A31 : Isomorphisme exceptionnel $SU(2)/\{\pm 1\} \approx SO(3)$

La bibliographie :

[Per]-[FG3]-[MnT]-[Szp]-[GoC]-[Cmb]-[Gri]