

103 – Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

« *Quotienter, c'est tuer.* »

Le plan :

I) Généralités et exemples.

1) Propriétés élémentaires.

Définition, exemples. Structure du quotient par un sous-groupe, suite exacte. Indice, sous-groupe d'indice 2. Noyau d'un morphisme. Exemples en algèbre linéaire et affine. Groupe alterné. Sous-groupe du groupe quotient. Propriétés de l'indice.

2) Exemple universel.

Le centre d'un groupe. Exemple sur des groupes classiques. Condition $G/\mathcal{Z}(G)$ monogène \Rightarrow G abélien. Action par conjugaison de G sur lui-même. Formule des classes. App : groupes d'ordre p^2 .

3) Théorèmes d'homomorphisme.

Premier th., structure d'un groupe cyclique, d'un groupe monogène. $G/\mathcal{Z}(G) \approx \text{Int}(G)$. Théorème de Cayley. Isomorphismes exceptionnels. Normalisateur. Th. de Noether. Application au calcul de l'ordre d'un produit de groupes. Troisième th.

II) Devissage, simplicité

1) Simplicité.

Définition. Exemples. Th. de Sylow. Conséquence sur la simplicité. Application sur \mathfrak{A}_n et \mathfrak{A}_5 .

2) Produit semi-direct.

Définition, loi de c.i. Suite exacte. Caractérisation. Exemples dans \mathfrak{S}_n et D_n . App : classification des groupes d'ordre 8.

III) Groupe dérivé, résolubilité.

1) Groupe dérivé.

Définition. Exemples. Invariance par automorphisme. Abélianisé d'un groupe. Exemples

2) Groupes résolubles.

Définition, lien avec le groupe dérivé. Exemples (matrices triangulaires). Propriétés du quotient. Groupe d'ordre 105.

Les développements :

A15 : \mathfrak{A}_n est simple pour $n \geq 5$

A22 : \mathfrak{A}_5 est le seul groupe simple d'ordre 60

A30 : Classification des groupes d'ordre 8

A31 : Isomorphisme exceptionnel $SU(2)/\{\pm 1\} \approx SO(3)$

La bibliographie :

[Per]-[Cmb]-[CaG]-[FG0]-[FG1]