

104 – Groupes finis. E&A.

« \mathfrak{A}_4 n'est pas simple, parce qu'on n'est pas encore arrivé à 5 »

Un petit commentaire avant de commencer : lire le rapport du jury.

Le plan :

I) Propriétés des groupes finis.

1) Ordre

Ordre d'un groupe fini, d'un élément. Exemple. Théorème de Lagrange. Formule des indices.

2) Actions de groupes finis.

Exemples. Théorème de Cayley. Orbite, stabilisateur, équation aux classes. Formule de Burnside. App : th. de Wedderburn. Théorème de Cauchy.

3) Théorèmes de Sylow.

Définition d'un p-groupe. Groupes d'ordre p^2 . Un p-groupe possède des sous-groupes distingués de tous ordres divisant $|G|$. p-Sylow. Théorèmes de Sylow. Utilisations. Exemple d'un groupe d'ordre 63.

II) Groupes abéliens finis.

1) Groupes cycliques.

Générateurs. Indicatrice d'Euler. Exemple. Sous-groupes. Groupe multiplicatif d'un corps fini. $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Restes chinois. Lien avec les racines n-ièmes de l'unité.

2) Structure des groupes abéliens finis.

Théorème de structure, facteurs invariants. Exemple. Composantes primaires d'un groupe abélien fini.

III) Présentation de groupes finis.

1) Groupes symétrique et alterné.

Cardinal, centre. Générateurs. Signature. App : Frobenius-Zolotarev. Définition du groupe alterné par la signature. Générateurs. Simplicité. \mathfrak{A}_5 . Groupe des isométries d'un polyèdre régulier.

2) Groupe diédral.

Polygone régulier. Définition de D_n , cardinal. Générateurs. Caractérisation.

3) Groupe quaternionique.

Définition de \mathbb{H}_8 . Centre. Caractérisation.

4) Application : classification des sous-groupes finis selon leur ordre.

Classification des groupes finis d'ordre 8 et 12.

5) Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$

Le critère de Burnside : exposant fini \Leftrightarrow fini (curieux !).

Les développements :

A6 : Critère de finitude de Burnside.

A15 : \mathfrak{A}_n est simple pour $n \geq 5$

A16 : Frobenius-Zolotarev

A18 : Groupe d'isométries du cube

A22 : \mathfrak{A}_5 est le seul groupe simple d'ordre 60

A30 : Classification des groupes d'ordre 8

La bibliographie :

[Ale]-[Per]-[CaG]-[FrG]-[BMP]-[Cmb]-[Szp]