105 – Groupe des permutations d'un ensemble fini. A.

« Les théorèmes de décomposition, c'est diviser pour régner. »

Le plan :

I) Groupe symétrique, alterné.
Définition, structure de groupe, bijection entre les $\mathfrak{S}_E$ pour #E=n. Th de Cayley. Elements de $\mathfrak{S}_n$: définition d'un cycle, d'une transposition à l'aide des orbites. Signature. Conjugaison. Définition du groupe alterné. La signature est le seul morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$. App : Th. de Frobenius-Zolotarev.

II) Etude algébrique.
Générateurs. Simplicité. Résolubilité. Automorphismes intérieurs.

III) Actions de $\mathfrak{S}_n$

1) Sur les bases de $\mathbb{R}^n$

Présentation. Matrices de permutation. Propriétés. Théorème de Brauder. App : décomposition de Bruhat.

2) Sur $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$.

Définition, polynômes symétriques, alternés, semi-symétriques. Décomposition d'un polynôme semi-symétrique.

IV) $\mathfrak{S}_n$ dans la nature.
En géométrie, ce sont des groupes d'isométries des polyèdres réguliers. En algèbre, ce sont des groupes linéaires ou des sous-groupes sur des corps finis.

Les développements :

A15 : $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$
A16 : Frobenius-Zolotarev
A17 : Décomposition de Bruhat
A18 : Groupe d'isométries du cube

La bibliographie :

[Per]-[GO1]-[BMP]-[GOc]-[Cmb]-[FG1]-[AF1]