

108 – Exemples de parties génératrices d'un groupe.

« Cet élément, qu'on trouve sympathique pour des raisons purement affectives, on va l'appeler normal. Normal, on sait bien que ça veut rien dire, hein, mais on l'appelle comme ça. Normal. Bonne tête. »

Un petit commentaire avant de commencer : J'ai préparé cette leçon vers le début de l'année. Je serais moi, je retravaillerais ce plan !

Le plan :

I) Propriétés et exemples.

Définition de groupe engendré par une partie. Propriétés, exemples. Groupe monogène, cyclique. Groupe de type fini. Exemple. Groupe dérivé. Etude des morphismes de groupe.

II) Cas abélien de type fini.

Théorème de structure. Théorème chinois. Exemple. Classification des groupes cycliques. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, racines primitives. Groupe des automorphismes d'un groupe cyclique. Cyclotomie.

III) Exemples classiques et applications.

1) Groupe symétrique.

Générateurs de \mathfrak{S}_n , de \mathfrak{A}_n . Application : groupes dérivés, \mathfrak{A}_n est simple.

2) Groupe linéaire.

Générateurs de SL_n , de GL_n . App : groupes dérivés, simplicité de PSL_n dans certains cas.

3) Groupes orthogonaux.

Générateurs de $O(E)$, de $SO(E)$. $SO(E)$ agit sur la sphère. App : groupe du cube.

Les développements :

A15 : \mathfrak{A}_n est simple pour $n \geq 5$

A18 : Groupe des isométries du cube

A28 : Générateurs de $SL(E)$ et de $GL(E)$

La bibliographie :

[Per]-[Cmb]-[CaG]