111 – Anneaux principaux. A.

« Ca, c'est un outil de Jedi ! »

Le plan :

I) Généralités. Lien avec les anneaux factoriels et euclidiens.

Notion d'idéal principal, d'anneau principal. Propriétés des idéaux d'un anneau principal. Exemple : $\mathbb{Z}$. Corollaire : $\mathbb{Z}$ est factoriel. Condition pour que A[X] soit principal, pour que A[[X]] soit principal. Exemple d'anneau non principal (non transfert). Suite croissante d'idéaux d'un anneau principal. Factorialité, anneaux euclidiens. Exemples. Exemples des entiers de Gauss : étude des inversibles, des irréductibles. Théorème des deux carrés. Eléments irréductibles de $\mathbb{K}[[X]]$: ce sont les $(X^p)_{p\geq 1}$. Exemple d'anneau principal non euclidien. Factoriel non principal.

II) Arithmétique.

1) Définitions.

Définitions de ppcm et pgcd => toujours existence dans un anneau principal. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. Exemple : contenu d'un polynôme, lemme de Gauss version polynômiale. Irréductibles de A[X].

2) Applications.

En algèbre linéaire : existence du polynôme minimal en dimension finie. Lemme des noyaux. CNS de diagonalisabilité. Endomorphismes semi-simples. Théorème chinois et étude de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Théorie des corps : extensions algébriques.

III) Facteurs invariants, invariants de similitude.

1) Le théorème.

Théorème des facteurs invariants dans un anneau principal. Corollaire. App : on retrouve la classification des orbites par le rang pour l'action par équivalence.

2) Invariants de similitude.

Théorème des invariants de similitude. Applications.

Les développements :

A1 : Endomorphismes semi-simples
A20 : Théorème des deux carrés

La bibliographie :

[Per]-[Cmb]-[Ser]-[FG1]-[FG0]-[Go1]