113 – Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. A.

« Là on magouille. On peut très bien planter la flèche et après dessiner la cible... c'est ce qu'on fait, et après vous allez voir, on est en plein dans le mille. »

Un petit commentaire avant de commencer : il faut montrer que l'on peut retrouver le cercle un peu partout dans la nature.

Le plan :

I) Nombres complexes de module 1.
Définition du modules, définition de $\mathbb{U}$ comme noyau de $|.|$, décomposition polaire de $\mathbb{C}^*$, analogie avec $GL_n(\mathbb{C})$. Exponentielle complexe. Définition de e^{it} par restriction de exp à $\mathbb{U}$. Noyau. Cosinus, sinus. Définition de Pi. Formules de Moivre et d'Euler. Théorème du relèvement.

II) Argument et géométrie.
Définition des arguments d'un complexe z : $e^{i\theta}=z/|z|$, argument principal. Isomorphisme entre $\mathbb{U}$ et $\mathbb{R}/2.\text{Pi}.\mathbb{Z}$. Isomorphismes entre $\mathbb{U}$ et SO(2), entre $\mathbb{U}$ et $SO(\mathbb{R}^2)$. Angle orienté d'une rotation vectorielle. Angle orienté entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Angle orienté de droites. Sommation des angles orientés.

III) Sous-groupes de $\mathbb{U}$, applications.

1) Sous-groupes de $\mathbb{U}$.

$z \to z^n$ homomorphisme de groupes surjectif. Son noyau est $\mathbb{U}_n$. Ecriture des éléments de $\mathbb{U}_n$. Générateurs de $\mathbb{U}_n$, structure de groupe. $(\mathbb{U}_n,\times)\approx(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. $\mathbb{U}_n$ est le seul sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*,\times)$ de cardinal n. Théorème de Kronecker. Sous-groupe de $\mathbb{U}$ est soit dense dans $\mathbb{U}$ soit un $\mathbb{U}_n$.

2) Cyclotomie.

Définition de $\phi_{n,\mathbb{K}}$. Factorisation de X^n-1, propriétés de $\phi_{n,\mathbb{K}}$, irréductibilité. App : théorème de Wedderburn, progression arithmétique de Dirichlet.

3) Géométrie.

Construction à la règle et au compas. Théorème de Gauss.

Les développements :

A2 : Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Z}$
A4 : Théorème de Wantzel
A25 : Théorème de Wedderburn

La bibliographie :

[AF1]-[Per]-[Aud]-[Goz]-[FG1]