

114 – Anneau des séries formelles.

« C'est pas : on peut définir, c'est bien ! C'est : c'est bien défini ! Ca devrait être en un mot d'ailleurs... Je biendéfinis, tu biendéfinis... »

Un petit commentaire avant de commencer : Une leçon élaborée par une collègue qui a du se débrouiller toute de seule de par la nouveauté de la leçon en 2010. A mon humble avis, cette leçon tient bien la route.

Le plan :

I) Suites dans un anneau, série génératrice.

Construction de $A[[X]]$. Loi $+,x$. Exemples. Notion d'ordre, conventions. Propriétés de l'ordre. Conséquences sur l'intégrité de $A[[X]]$. Séries formelles emboîtées, valuation. Série formelle dérivée.

II) Propriétés de l'anneau $A[[X]]$.

Éléments inversibles, irréductibles. Corps des fractions. Principalité, localité sous conditions. Noethérien, A principal $\Rightarrow A[[X]]$ factoriel et noethérien.

III) Lien avec les fractions rationnelles.

Propriété universelle du corps des fractions. Exemple : $\mathbb{K}(X)_0$. Contre exemple. Relation de récurrence linéaire dans une série formelle. App : suite de Fibonacci.

IV) Structure d'espace métrique.

Définition de la métrique. Rq. : c'est une ultramétrie. Lien entre suite de Cauchy et convergence. Complétude de $\mathbb{K}[[X]]$.

V) Utilisation des séries formelles.

Nombre de dérangements. Parenthésages de Catalan.

Les développements :

A32 : Relation de récurrence linéaire et étude de la suite de Fibonacci

A33 : Problème des parenthésages de Catalan

La bibliographie :

[CaA]-[LF1]-[GoC]-[Arn]