

120 – Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. E&A.

« Le théorème de la base incomplète assure que... Bon, déjà, il assure, hein ! »

Un petit commentaire avant de commencer : Bien faire la distinction entre dimension et dimension finie.

Le plan :

I) Familles. Dimension finie. Dimension.

Famille génératrice. Dimension finie. Exemple d'espace vectoriel de dimension finie. Famille libre. Exemple. Base. Exemple (base canonique). $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Théorème de la base incomplète. Cardinal des bases. Dimension. Exemples. Sommes directes. Dimension du commutant. Classification des espaces vectoriels de dimension finie.

II) Rang et applications linéaires.

Rang d'une application linéaire. Base de $\mathcal{L}(E,F)$. Théorème du rang. Caractérisation d'une injection, d'une surjection. Rang d'une famille de vecteurs. Rang d'une matrice. Isomorphisme canonique, équivalence (coordination) des trois notions. Equivalence.

III) Rang et actions de groupes.

1) Action par équivalence.

Equivalence, orbites. Théorème du rang version action de groupes. Topologie sur les orbites.

2) Congruence.

Exemple de matrices congruentes sur \mathbb{C} et pas sur \mathbb{R} . Définition de la signature et de l'indice, du discriminant d'une forme bilinéaire symétrique. Classification des formes quadratiques.

3) Relations de Plücker.

Action de GL_n sur {sous-espaces vectoriels de E }. Grassmannienne. Plongement de Plücker. Relations de Plücker.

IV) Applications en théorie des corps.

1) Extensions algébriques.

Degré d'une extension. Théorème de la base télescopique. Multiplicativité des degrés. Éléments algébriques et transcendants. Degré du polynôme minimal.

2) Constructions à la règle et au compas.

La règle du jeu. Théorème de Wantzel. Corollaire. Théorème de Gauss.

Les développements :

A4 : Théorème de Wantzel

A5 : Relations de Plücker

A19 : Topologie sur les orbites pour l'action par équivalence

La bibliographie :

[Goz]-[Go1]-[Per]-[HoP]-[FrM]