

123 – Déterminant. E&A.

« Un noyau, on n'aime pas ça, on a envie de le tuer. »

Le plan :

I) Définition.

1) Déterminant d'une application linéaire.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base de E . Théorème d'existence et d'unicité d'une forme n -linéaire alternée telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$, c'est $\det(e)$. Formule du changement de base. Application : orientation d'un espace vectoriel réel. Déterminant d'un endomorphisme. Il existe un unique scalaire noté $\det(u)$ tel que pour toute forme n -linéaire alternée f , et tous vecteurs x_1, \dots, x_n , $f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \cdot f(x_1, \dots, x_n)$. Déterminant dans une base, expression. Propriétés du déterminant. Caractérisation d'un endomorphisme inversible.

2) Déterminant d'une matrice carrée.

On peut se placer sur un anneau commutatif. $\det(UV) = \det(U) \times \det(V)$. Définition d'un mineur, comatrice. Formule de l'inverse d'une matrice par la comatrice. Continuité du \det car polynôme en les coefficients de la matrice. App : $GL_n(\mathbb{C})$ ouvert et connexe. App : matrices réelles semblables sur \mathbb{C} sont semblables sur \mathbb{R} . Caractérisation d'inversibilité d'une matrice. Frobenius-Zolotarev.

II) Déterminant et rang.

1) Méthodes de calcul.

Déterminant d'une matrice diagonale, triangulaire. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Exemples : Cauchy, Vandermonde.

2) Lien rang/déterminant.

Rang et taille des mineurs et des bordants. Définition du plongement de Plücker, relations de Plücker. Caractérisation de Sylvester des matrices symétriques définies positives.

3) Systèmes linéaires.

Système de Cramer, formules de Cramer. Déterminants bordants.

III) Déterminant et polynômes.

1) Polynôme caractéristique.

Définition. App : théorie de la réduction. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent.

2) Résultant de deux polynômes.

Définition dans un anneau. Application linéaire de Sylvester. Formule du rang. Conséquence. Formule de Poisson.

IV) Déterminant, distances et volumes.

1) Distances.

Matrice de Gram+propriétés. Cauchy-Schwarz. Déterminant de Gram. App : théorème de Müntz.

2) Volume.

Déterminant et mesure de Lebesgue. Volume d'un parallépipède et application à Gram. Formule du changement de variables.

Les développements :

A5 : Relations de Plücker

A13 : Deux propriétés sur le résultant

A16 : Frobenius-Zolotarev

La bibliographie :

[Szp]-[FG3]-[Go1]-[Go2]-[HoP]-[RD1]-[BMP]