126 – Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

« Je ne sais pas comment on l'enseigne dans la police "avoir une bonne tête"»

Un petit commentaire avant de commencer : C'est la leçon que je n'ai pas prise à l'oral de l'agreg.

Le plan :

I) Généralités.
Définition de vecteur et valeur propre d'un endomorphisme. Sous-espace propre. Spectre. Polynôme caractéristique, anulateur, minimal. Invariance par similitude de χ par similitude. Lemme des noyaux. Cayley-Hamilton.

II) Diagonalisabilité.
Définition. Les 8 CNS, quelque CS. Exemple pour illustrer l'importance du corps sur lequel on travaille. Propriétés des espaces stables. Exemples des projecteurs. CNS pour les corps finis. Diagonalisation simultanée. Exemples fondamentaux : symétriques réelles, hermitiennes, unitaires, normales complexes.

III) Etude de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.
Théorème de densité. Etude de l'ensemble des diagonalisables aux valeurs propres distinctes. Adhérence de O_A (pour l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$). Isomorphisme entre $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})/GL_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$.

IV) Applications et exemples.

1) Dunford et exponentielle.

Définition. Décomposition de Dunford. Diagonalisabilité de l'exponentielle. Critère de finitude Burnside. Calcul de puissances.

2) Endomorphismes semi-simples.

Définition, irréductibilité du polynôme minimal. CNS. Distinctions des cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

3) En analyse.

Système différentiel linéaire à coefficients constants. Résolution des suites récurrentes linéaires.

Les développements :

A1 : Endomorphismes semi-simples
A7 : Diagonalisabilité et exponentielle
A27 : Topologie sur les endomorphismes diagonalisables

La bibliographie :

[Gri]-[Gog]-[BMP]-[Go1]-[FG2]