128 – Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

« Le tableau de Young, c'est des boites… Comme à IKEA. »

Un petit commentaire avant de commencer : attention aux développements que je propose, ils m'ont l'air bien peu adaptés à cette leçon !

Le plan :

I) Endomorphismes trigonalisables.

Définition. Caractérisations. Cas algébriquement clos. Sous-espaces stables. Exemple. Spectre d'un endomorphisme. Trigonalisation simultanée. Propriétés topologiques des endomorphismes diagonalisables et trigonalisables.

II) Endomorphismes nilpotents.

1) Définition.

Définition, caractérisation. Exemple : opérateur de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$, sur $\mathbb{K}_n[X]$. Indice de nilpotence. Diagonalisable et nilpotent. Application : théorème de finitude de Burnside.

2) Structure de $\mathcal{N}$.

Cône. Contre exemple pour +. Vect($\mathcal{N}$)=Ker(tr). Une CS pour uov dans $\mathcal{N}$, pour u+v dans $\mathcal{N}$.

III) Réduction des endomorphismes.

1) Dunford.

Sous-espace caractéristique. Stabilité. Projection sur l'un parallèlement aux autres est un polynôme d'endomorphisme. Décomposition de Dunford.

2) Noyaux itérés.

Suite des noyaux itérés, croissance et essoufflement. Propositions du [FG1] et [FG2]. Décomposition de toute matrice carrée en une matrice diagonale par bloc avec un bloc nilpotent et l'autre inversible.

3) Réduction de Jordan.

Tableaux de Young. Invariance sous l'action par similitude sur $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Exemple. Dimension du noyau, lecture d'une base adaptée dans le tableau de Young et réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent. Remarque sur la réduction de Jordan en général. Application de caractéristique nulle, M nilpotent $\Leftrightarrow$ M et λM sont semblables.

IV) Applications.

1) Lien avec des autres endomorphismes.

Définition d'un endomorphisme cyclique. Caractérisation d'un endomorphisme cyclique par les polynômes caractéristique et minimal, par les sous-espaces stables sur un corps infini. Endomorphismes cycliques et nilpotents.

2) Exponentielle.

Définition. Surjection. Envoie les nilpotents sur les unipotents. Conditions de diagonalisabilité de l'exponentielle.

Les développements :

A6 : Critère de finitude Burnside
A7 : Diagonalisabilité et exponentielle

La bibliographie :

[Go1]-[BMP]-[FG1]-[FG2]-[Ale]