130 – Matrices symétriques réelles. Matrices hermitiennes.

«Ca, c'est le théorème de la base incomplète à la sauce orthonormée. Vous savez, il existe plein de sauces, la cuisine, hein… »

Le plan :

I) Définitions.

1) Matrices symétriques réelles.

Définition, isomorphisme avec l'ensemble des formes bilinéaires symétriques. Expression en calcul matriciel d'une forme bilinéaire symétrique. Définie positivité.

2) Matrices hermitiennes.

Définition. Isomorphisme avec l'ensemble des formes hermitiennes sur C. Notion de positivité, définie positivité. Spectre d'une matrice hermitienne. Dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices hermitiennes.

II) Classification des formes associées.

Notion d'orthogonalité, vecteur et sous-espaces orthogonaux. Procédé de Gram-Schmidt. Méthode de Gauss. Loi de Sylvester. Classification des matrices symétriques réelles et hermitiennes. Cas défini-positif. Exemple. Lien entre une forme hermitienne et une forme bilinéaire symétrique de mêmes signatures.

III) Réduction.

Toute matrice symétrique/hermitienne admet un vecteur propre non nul. Existence de BON de vecteurs propres pour S/H. Lien avec la signature. Conséquences sur le det d'une somme, ellipsoïde de John. Existence d'une matrice carrée, diagonalisation hermitienne.

IV) Etude topologique.

L'exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$, de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{H}_n^{++}$. Ouverts $\mathcal{S}_n^{++}$, $\mathcal{H}_n^{++}$, fermés $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{H}_n$. Décomposition polaire. Application à l'étude des groupes classiques. Exemples : groupes unitaires, groupes orthogonaux.

V) Applications en analyse.

1) Analyse numérique.

Conséquence de la décomposition de Cholesky, décomposition QR. Convergence de la méthode de Gauss-Seidel.

2) Calcul différentiel.

Lemme de Schwarz. Lemme de Morse. Applications.

Les développements :

A24 : Homéomorphisme de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{H}_n^{++}$
A29 : Décomposition de O(p,q)
B24 : Convergence de la méthode de Gauss-Seidel

La bibliographie :

[Gri]-[Per]-[Fil]-[Ser]-[Rou]-[FG3]