

145 – Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

«La combinatoire algébrique, c'est plutôt récréatif. Le but, c'est de changer d'air, c'est un peu exotique. »

Le plan :

I) Généralités.

1) Principe de base.

Cardinaux d'ensembles en bijection. Produit cartésien. Principe du raisonnement par récurrence. Formule du crible. App : nombre de dérangements.

2) Combinaisons.

Nombre de parties de cardinal p dans un ensemble de cardinal n . Exemple : nombre de p -cycles dans \mathfrak{S}_n . Relation de Pascal. Formule du binôme de Newton.

3) Applications.

Nombre de parties d'un ensemble. Nombre d'injections.

II) Utilisation des fonctions d'Euler et de Möbius.

Définition de fonction multiplicative.

1) Indicatrice d'Euler.

Définition, multiplicativité. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Inversibles. $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Théorème chinois. Expression générale de φ . Propriétés. Groupe des inversibles d'un corps : cyclicité.

2) Fonction de Möbius.

Définition, multiplicativité. Formule d'inversion. App : dénombrement des polynômes irréductibles sur \mathbb{F}_q . Autre : probabilités que deux nombres soient premiers entre eux.

III) Utilisation en algèbre.

1) Actions de groupes finis.

Action. Orbite, stabilisateur. Fix. Equation aux classes. Formule de Burnside. Roue de loterie. Groupes finis de $\text{SO}(3)$. Théorème de Wedderburn.

2) Théorème de Sylow.

Définition, théorèmes de Sylow. Simplicité. \mathfrak{A}_5 est le seul groupe simple d'ordre 60.

3) Combinatoire algébrique.

Groupes classiques sur \mathbb{F}_q , isomorphismes exceptionnels.

IV) Utilisation des séries formelles.

Définition de série génératrice d'une suite. Relation de récurrence linéaire dans une série formelle. Exemple avec Fibonacci. Parenthésages de Catalan. Inversibilité d'une série formelle. Dérangements et nombre de k -uplets.

Les développements :

A3 : Dénombrement des polynômes irréductibles sur \mathbb{F}_q

A22 : \mathfrak{A}_5 est le seul groupe simple d'ordre 60

A25 : Théorème de Wedderburn

A32 : Relation de récurrence linéaire et suite de Fibonacci

A33 : Problème des parenthésages de Catalan

La bibliographie :

[Ctt]-[Per]-[LF1]-[Go1]-[FG0]