

149 – Groupes finis de petit cardinal.

« Un groupe, c'est comme une grue. Et pour construire une grue, on a besoin d'une autre grue. Alors, comment a-t-on construit la première grue ? Bon, je n'en sais rien ! »

Un petit commentaire avant de commencer : J'interprète ici le mot « petit » comme « inférieur à 60/100 ». A vous de voir si ça vous va.

Le plan :

I) Propriétés des groupes finis.

Lagrange. Ordre d'un élément, ordre d'un groupe. Théorème d'homomorphisme. Classes, Burnside, Cayley. Sylow. Produit semi-direct.

II) Présentation de groupes finis.

1) Groupe symétrique.

Exemple. Groupe alterné. Pour $n=2$, $n=3$, $n=4$ et $n=5$. \mathfrak{A}_5 est le seul groupe simple d'ordre 60. Pour $n=4$, bien insister sur \mathfrak{B}_4 . Dévissage.

2) Groupe diédral.

Définition, caractérisation, exemple. Dévissage. Exemple. Décomposition en produit semi-direct.

3) Groupe quaternionique \mathbb{H}_8 .

Relations. Centre. Indécomposabilité en produit semi-direct.

III) Comment les retrouver dans la nature.

1) Géométriquement.

Groupe d'isométrie laissant stable un polygone régulier à n côtés. Groupe d'isométrie laissant stable un rectangle. Groupe laissant stable un polyèdre régulier.

2) En algèbre linéaire.

Combinatoire algébrique et isomorphismes exceptionnels.

IV) Propriétés des groupes relatives au cardinal.

1) Groupes d'ordre premier.

2) Groupes d'ordre p^2 .

3) Groupes d'ordre pq .

Exemple : 6, 10, 14, 15...

4) Groupes d'ordre pq^2 .

Exemple : 63.

5) Groupes d'ordre 8, 12.

Classification des groupes finis d'ordre 8 et 12.

Les développements :

A18 : Groupe des isométries du cube

A22 : \mathfrak{A}_5 est le seul groupe simple d'ordre 60

A30 : Classification des groupes d'ordre 8

La bibliographie :

[Per]-[Szp]-[FG0]-[Cmb]