

# 105 : GROUPE DES PERMUTATIONS D'UN ENSEMBLE FINI

## I. Structure de $S_n$ [CaG][Com]

1. Définitions  
def, Cayley, support, ordre, orbite
2. Cycles et transposition  
dec en cycles, ordre, générateurs : transpo /  $(1n)/(i,i+1)$  /  $(1,2)(1,2\dots n)$
3. Signature et groupe alterné  
def, unique morphisme,  $A_n = \text{Ker}(\varepsilon)$

## II. Etude algébrique [P]

1. Classes de conjugaison  
carac et card des classes de conjugaison
2. Simplicité et résolubilité  
**An simple si  $n \geq 5$** ,  $Z(S_n) = \{1\}$ ,  $D(A_n) = D(S_n) = A_n$
3. Automorphismes et actions  
 $\text{Stab}(x) \cong S_{n-1}$  -  $[H:S_n] = n \Rightarrow H \cong S_{n-1}$  -  $\text{Aut}(S_n) = \text{Int}(S_n)$  si  $n \neq 6$

## III. Applications [Com][CaG][GoC]

1. Déterminant, matrices de permutation  
def mat de perm, det – FL alternée – lien det/ $\varepsilon$
2. Géométrie  
Groupes d'isométrie de polyèdres réguliers, **groupe du cube**  
Carac des ss-gpes de  $SO_3$

3. Polynômes symétriques  
carac des pol sym par l'action de  $S_n$ ,  $S[X_1, \dots, X_n] = P[S_1, \dots, S_n]$
4. Isomorphismes exceptionnels

### Biblio :

Calais  
Combes  
Perrin  
Goblot (alg commutative)

### Développements :

5 –  $A_n$  simple si  $n \geq 5$   
10 – Groupe d'isométrie du cube