

113 : GROUPE DES NB COMPLEXES DE MODULE 1 – RACINES DE L'UNITE – App

I. Le groupe U [AF1] - [Au]

1. Groupe des complexes de module 1
ss-gpe de \mathbb{C}^* - interp geom
2. Lien avec la droite réelle
exp complexe – $U \sim \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ – def cos, sin - argument
3. Lien avec les rotations du plan
 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \sim \text{SO}(2)$ – mes d'un angle orienté

II. Racines de l'unité [AF1] – [LF1]

1. Le groupe U_n
 $U_n = \text{Ker}(f_n)$ – cyclique d'ordre n, réciproque – $U_n \sim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
2. Racines primitives $n^{\text{ièmes}}$
= génér de $U_n / \exp(\dots)$ - ind d'Euler – $U_n^* \sim \mathbb{Z}/\varphi(n)\mathbb{Z}$
3. Interprétation géométrique
polygônes convexes, étoilés – nb de polg = $\varphi(n)/2$
4. Racine $n^{\text{ième}}$ d'un complexe

III. Polynômes cyclotomiques [Pe][Com]

1. Construction
def de Φ_n , deg, $X^n - 1 =$ - construction par rec
2. Propriétés
 $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$, $\Phi_n(0)=1$ – irred sur \mathbb{Z} , $\mathbb{Q} - [\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}]=\varphi(n)$

3. Applications

Wedderburn

Th dirichlet faible (+lemme) – $U_n^* = U_{n/2} - p | n^{2^{k+1}} \Rightarrow p = m2^{k+1} + 1$

Biblio :

Arnaudies Fraysses 1

Audin

Lelong-Ferrand Arnaudies 1

Perrin

Combes

Développements :

11 – Théorème de Dirichlet faible

12 – Irreductibilité de Φ_n sur \mathbb{Q}