

# 113 : GROUPE DES NB COMPLEXES DE MODULE 1 – RACINES DE L'UNITE – App

## I. Le groupe U [AF1] - [Au]

1. Groupe des complexes de module 1  
ss-gpe de  $\mathbb{C}^*$  - interp geom
2. Lien avec la droite réelle  
exp complexe –  $U \sim \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  – def cos, sin - argument
3. Lien avec les rotations du plan  
 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \sim \text{SO}(2)$  – mes d'un angle orienté

## II. Racines de l'unité [AF1] – [LF1]

1. Le groupe  $U_n$   
 $U_n = \text{Ker}(f_n)$  – cyclique d'ordre n, réciproque –  $U_n \sim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
2. Racines primitives  $n^{\text{ièmes}}$   
= génér de  $U_n / \exp(\dots)$  - ind d'Euler –  $U_n^* \sim \mathbb{Z}/\varphi(n)\mathbb{Z}$
3. Interprétation géométrique  
polygônes convexes, étoilés – nb de polg =  $\varphi(n)/2$
4. Racine  $n^{\text{ième}}$  d'un complexe

## III. Polynômes cyclotomiques [Pe][Com]

1. Construction  
def de  $\Phi_n$ , deg,  $X^n - 1 =$  - construction par rec
2. Propriétés  
 $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ ,  $\Phi_n(0)=1$  – irred sur  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q} - [\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}]=\varphi(n)$

## 3. Applications

Wedderburn

Th dirichlet faible (+lemme) –  $U_n^* = U_{n/2} - p | n^{2^{k+1}} \Rightarrow p = m2^{k+1} + 1$

## Biblio :

Arnaudies Fraysses 1

Audin

Lelong-Ferrand Arnaudies 1

Perrin

Combes

## Développements :

11 – Théorème de Dirichlet faible

12 – Irreductibilité de  $\Phi_n$  sur  $\mathbb{Q}$