201 – Espaces de fonctions. E&A.

Le plan :

I) Espaces de fonctions continues sur des espaces métriques.

1) Définition.

Complétude si espace d'arrivée complet, fermeture. Lemme de Dini. Contre exemple.

2) Problèmes de densité.

$\mathcal{B}$(X,K), $\mathcal{C}$(X,K) algèbres de Banach. Stone-Weierstrass. Exemple. Contre exemple. App : polynômes trigonométriques.

3) Familles équicontinues.

Définition de l'équicontinuité. Théorème de l'application ouverte et du graphe fermé. Propriétés d'une famille équicontinue en convergence simple. Uniforme équicontinuité. Théorème d'Ascoli. App : sous-espaces fermés de $\mathcal{C}$([a,b]).

II) Espaces L^p.

1) Définition.

Inégalités de Hölder et de Minkowski. Définition de L^p avec $\mathcal{L}^p$. Théorème de convergence dominée. Les espaces L^p sont des Banach.

2) Problèmes de densité.

Fonctions étagées intégrables. $L^1 \cap L^\infty$ est dense dans L^p. $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans L^p. Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

3) Espace L^2.

Produit scalaire. Espace de Hilbert. Théorème de projection. Bases hilbertiennes de L^2. Polynômes orthogonaux. Opérateurs de Hilbert-Schmidt. Noyaux reproduisants.

III) Fonctions holomorphes.

1) Topologie.

Propriétés de $\mathcal{H}(\Omega)$, de $\mathcal{H}$(C). Topologie de la convergence uniforme sur tout contact. Distance. Complétude. Métrisabilité de la CUC. Théorème de Weierstrass. Complétude dans $\mathcal{C}(\Omega)$. Partie localement bornée. Relative compacité : théorème de Montel. Compacité.

2) Espace de Bergman.

Définition. Espace de Hilbert. Base hilbertienne. Noyau de Bergman.

Les développements :

B2 : Théorème Stone-Weierstrass (cas réel)
B5 : Sous-espaces fermés de $\mathcal{C}$([a,b])
B10 : Complétude des L^p
B11 : Espace de Bergman

La bibliographie :

[Tis]-[ZuQ]-[Bré]-[BrP]-[HiL]-[BaM]-[Car]-[GT1]