

203 – Utilisation de la notion de compacité.

Le plan :

I) Notion d'espace compact.

Définition. Axiome de Borel-Lebesgue. Partie compacte. Remarque topologique. Propriété. Avec l'intersection de fermés. Cas des espaces métriques ? Exemple. Séparation des compacts par des ouverts. Lien compact/fermé. Valeur d'adhérence. Propriétés des suites dans un compact. Précompacité. Compacité relative. Propriétés. Compacts dans \mathbb{R}^n . Théorème de Tychonoff. Opérateurs compacts, spectre d'un opérateur compact.

II) Continuité, convergence.

Image d'un compact par une application continue. Homéomorphisme. Sup et inf atteints sur un compact. App : théorème de d'Alembert. Distance d'un compact à un fermé. Théorème de Heine. Lemme de Dini. Lien entre continuité et convergence UC. Problème d'extrema. Dérivabilité. Interversio limite/intégrale.

III) Problèmes d'approximation.

1) Fonctions continues.

Théorème de Stone-Weierstrass. Application aux polynômes, polynômes trigonométriques.

2) Fonctions lisses.

$C_c(X)$ est dense dans L^p . Approximation de l'identité. Exemple. Approximations régulières de fonctions dans L^p . $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dense dans L^p .

IV) Compacité dans les espaces de fonctions.

1) Fonctions continues.

Parties équi continues. Théorème d'Ascoli. Propriétés des suites équi continues.

2) Fonctions holomorphes.

Théorème de Montel. Application : représentation conforme de Riemann.

3) Fonctions L^p .

Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Les développements :

B2 : Stone-Weierstrass (le cas réel)

B25 : Spectre d'un opérateur compact

La bibliographie :

[Tis]-[AF2]-[Far]-[Bré]-[Car]