# 204 – Connexité. E&A.

Le plan :

## I) Notion de connexité.

Définition et caractérisations. Espace topologique connexe. Sous-espace connexe. Caractérisations. Propriétés diverses. Contre exemples et remarques avec l'intersection de deux connexes où l'intérieur de deux connexes, avec des contre exemples. Image continue d'un connexe. Application : $GL_n(\mathbb{R})$ non connexe. Union de connexes. Produit cartésien d'espaces connexes (fini). Composantes connexes. Propriétés. Connexes de $\mathbb{R}$, théorème des valeurs intermédiaires. Homéomorphisme. Darboux. Connexité par arcs. Exemples. Implication entre connexe par arcs et connexe. Lien avec les formes linéaires.

## II) Utilisations en analyse.

### 1) Passer du local au global.

Ouvert connexe est connexe par arcs. Localement constante => constante. Différentielle nulle sur un connexe.

### 2) En analyse complexe.

Théorème des zéros isolés. Coïncidence de fonctions holomorphes : prolongement analytique. Exemple.

### 3) Calcul différentiel.

Théorème de la boule chevelue, lemme de non rétraction. Equations différentielles : Cauchy-Lipschitz global, Hadamard-Levy.

## III) Utilisation en algèbre.

Groupes topologiques. Sous-groupe ouvert. Cas connexe. App : exp surjective sur C*. Quotient connexe par un sous-groupe connexe. Groupes classiques. $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, SO(n), U(n), SU(n), O(n), les lagrangiens d'une forme quadratique non dégénerée sur $C^{2n}$. Application : SO(3) est simple. Décomposition polaire de O(p,q). $GL_n+(\mathbb{R})$ connexe. Théorème d'isomorphisme.

Les développements :

B26 : Théorème de Hadamard-Levy
*A12 : Lagrangiens d'une forme quadratique non dégénérée sur* $\mathbb{C}^{2n}$
A19 : Topologie des orbites pour l'action par équivalence

La bibliographie :

[MnT]-[RD3]-[Go2]-[Tis]-[Rud]-[GT2]-[BMP]-[ZuQ]-[Pom]