205 – Espaces complets. E&A.

Le plan :

I) Définition. Propriétés.

Définition d'espace complet, exemples. Espaces vectoriels de dimension finie. $\mathbb{Q}$ non complet. Construction de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est complet. Exemple de distance non normable sur $\mathbb{R}$ pour laquelle $\mathbb{R}$ n'est pas complet. Propriétés des espaces complets dans des espaces métriques. Segments emboîtés. Produit d'espaces complets. Lien entre compacité, précompacité et complétude.

II) Utilisations diverses.

1) Prolongement et complétion.

Critère de Cauchy et prolongements. Prolongements des applications uniformément continues définies sur une partie dense. Application : intégrale de Riemann. Complétion des espaces métriques, densité, exemple avec L^p.

2) Convergence des séries.

Définition de CVA. E complet => (CVA=CV). Théorème d'interversion de limites.

3) Points fixes.

Théorème de point fixe. Application à Cauchy Lipschitz local.

III) Théorème de Baire et applications.

1) Définitions.

Théorème de Baire. Exemple. Exemples d'applications directes.

2) Analyse fonctionnelle.

Banach-Steinhaus. Série de Fourier d'une fonction continue qui diverge. Théorème de l'application ouverte et du graphe fermé. Espace vectoriel normé à base dénombrable non complet. Si pour tout x il existe n tel que $f^{(n)}(x)=0$ alors f est un polynôme.

IV) Analyse hilbertienne.

Produit scalaire. Base hilbertienne. Exemple de L^2. Projections. Riesz. Espace de Bergman.

Les développements :

B10 : Les espaces Lp sont complets
B11 : Espace de Bergman
B16 : Série de Fourier d'une fonction continue qui diverge.

La bibliographie :

[Mar]-[Go2]-[ZuQ]-[Tis]-[Bré]-[Pom]-[Rud]-[BaM]