

207 – Prolongement de fonctions. E&A.

Le plan :

I) Prolongement par régularité.

1) Continuité.

Définition d'un prolongement par continuité. Exemple sur $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Condition d'existence et d'unicité. Exemple. Théorème de Tietze.

2) Complétude.

Critère de Cauchy. Prolongement continu d'une fonction uniformément continue.

Application : existence et unicité du complété d'un espace métrique. Exemple de L^1 en tant que complété des fonctions étagées.

3) Prolongement C^1 .

Prolongement dérivable. Exemple : e^{-1/x^2} . Application.

II) Prolongement d'applications linéaires continues.

Théorème de prolongement des applications linéaires continues.

1) Exemple de la transformée de Fourier.

Définition, propriétés. Classe de Schwartz. Transformée de Fourier de fonctions $L^1 \cap L^2$. Théorème de Plancherel. Lemme : l'approximation de Poisson est une approximation de l'identité.

2) Hahn-Banach et applications.

Théorème, version analytique. Théorème de prolongement des formes linéaires continues.

Applications diverses. Contre exemples.

III) Prolongements analytiques.

1) Le principe.

Définition de l'analyticité. Exemple. Principe du prolongement analytique. Conséquences.

2) Prolongements classiques.

La fonction Γ d'Euler : définition, holomorphicité sur $\text{Re}(z) > 0$, méromorphie sur \mathbb{C} . Un mot sur la fonction ζ d'Euler.

3) Séries entières.

Cercle d'incertitude. Point régulier et point singulier. Théorème taubérien fort. Exemples.

Théorème des lacunes de Hadamard.

Les développements :

B18 : Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler sur \mathbb{C}

B31 : Théorème des lacunes de Hadamard.

La bibliographie :

[BMP]-[ZuQ]-[Pom]-[Go2]-[Tis]-[Far]-[TaC]