208 – Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. E.

Un petit commentaire avant de commencer : tu connais la différence entre une valeur spectrale et une valeur propre ?

Le plan :

I) Norme et continuité.
Caractérisations de la continuité. Exemple d'application linéaire non continue. Egalité des quantités sup(…) etc., définition de la norme associée à une norme. Espace $\mathcal{L}(E,F)$. Condition pour que $\mathcal{L}(E,F)$ Banach. Cas de $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_n,F)$. Isomorphisme canonique. Exemple de $\mathcal{L}(E,F)$: différentielle d'une fonction différentiable. Cas de la dimension finie : équivalence des normes, toutes les applications linéaires sont continues. Calcul des normes matricielles.

II) Exemple des formes linéaires.
Critère de continuité des formes linéaires avec les hyperplans et la connexité. Théorème de Hahn-Banach, versions analytique et géométrique. Eléments de dualité, dualité dans les L^p.

III) Cas des espaces de Banach.
Théorème de Baire. Théorème de Banach-Steinhauss. Application : il existe des séries de Fourier de fonctions continues qui divergent. Théorème de l'application ouverte et du graphe fermé. Espace vectoriel à base dénombrable non complet. pour tout x il existe n tel que $f^{(n)}(x)=0$ alors f est un polynôme. Opérateurs compacts, spectre d'un opérateur compact.

IV) Cas des espaces de Hilbert.
Théorème de représentation de Riesz. Exemple : L^2. Transformée de Fourier sur L^2 (th. de Plancherel). Exemple de base hilbertienne : les polynômes de Hermite. Vecteurs propres de la transformée de Fourier.

Les développements :

B8 : Vecteurs propres de la transformée de Fourier
B16 : Série de Fourier d'une fonction continue qui diverge
B25 : Spectre d'un opérateur compact

La bibliographie :

[KoF]-[ZuQ]-[Tis]-[Go2]