

213 – Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes. E&A.

Le plan :

I) Propriétés des espaces de Hilbert.

Définition, produit scalaire, Cauchy-Schwarz. Identité du parallélogramme. Espace de Hilbert. Exemple : L^2 , ℓ^2 . Banach vérifiant l'identité du parallélogramme. Théorème de projection. Théorème de Pythagore. Famille orthonormale. Exemple. Inégalité de Bessel. Base hilbertienne. Parseval. Existence. Séparabilité et dénombrabilité. Isométrie à $\ell^2(\mathbb{N})$. Expression d'un vecteur via le produit scalaire. Théorème de représentation de Riesz. Boule unité fermée.

II) L'espace L^2 .

Définition. Théorème des polynômes orthogonaux et densité. Exemples de bases hilbertiennes : polynômes de Legendre, Laguerre, Tchebychev. Polynômes de Hermite et application : vecteurs propres de la transformée de Fourier. Base de Haar.

III) Applications.

1) Espace de Bergman.

Définition, produit scalaire, base hilbertienne, noyau de Bergman.

2) Opérateurs compacts sur un Hilbert.

Définition. Base de vecteurs propres. Opérateurs de Hilbert-Schmidt. Noyau reproduisant. Théorème de représentation des opérateurs de Hilbert sur $L^2(X)$.

Les développements :

B8 : Vecteurs propres de la transformée de Fourier

B11 : Espace de Bergman

B17 : Densité des polynômes orthogonaux

La bibliographie :

[Bré]-[BaM]-[HiL]-[KoF]-[BMP]-[Go2]-[ZuQ]-[Rud]