

# **228 – Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. E&CE.**

*Un petit commentaire avant de commencer : inutile de préciser qu'il faut fournir, voire gaver cette leçon d'exemples !*

Le plan :

## **I) Continuité.**

Définition. Continuité à droite/gauche. Caractérisation séquentielle. Théorème des valeurs intermédiaires. Ensemble des applications continues : structure. Continuité par opérations. Image d'un intervalle. Bijection. Compacité et uniforme continuité. Applications lipschitziennes. Théorème de Heine.

## **II) Dérivabilité.**

Définition. Dérivabilité à gauche/droite. Propriétés. Opération. Lien avec la continuité. Définition des dérivées d'ordre supérieur, classe d'une fonction. Caractérisation d'une fonction convexe. Formule de Leibniz. Théorème de Rolle, accroissements finis. Formules de Taylor. Densité des fonctions nulle part dérivables dans les fonctions continues.

## **III) Espaces de fonctions $C^k$ .**

Définition, structure d'algèbre. Théorème de Stone-Weierstrass. Application aux polynômes et polynômes trigonométriques. Séparabilité. Sous-espaces fermés.

## **IV) Applications.**

### **1) Suites et séries de fonctions.**

Continuité pour limite uniforme, dérivabilité pour l'interversion de limites.

### **2) Calcul intégral.**

Primitives. Intégrale fonction de la borne d'en haut. Intégrales à paramètres. Applications.

Les développements :

B2 : Théorème de Stone-Weierstrass (cas réel)

B5 : Sous-espaces fermés de  $C([a,b])$

La bibliographie :

[Go2]-[GT1]-[Tis]-[ZuQ]-[Hau]-[AF2]