

230 – Séries de nombres réels ou complexes.

Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. E.

Le plan :

I) Généralités. Lien avec les séries entières.

Définition de série de terme général $(u_n)_n$. Notations. Somme partielle, reste d'indice n , convergence d'une série, convergence absolue. Semi-convergence. Exemple des séries géométriques. Critère de Cauchy, lien entre convergence d'une série et limite d'une suite. Produit de Cauchy. Opérations algébriques : propriétés. Lien suite/somme télescopique. Théorème de Fubini. Théorèmes d'Abel et taubériens.

II) Séries à termes positifs.

Comparaison série/intégrale. Sommes de Riemann. Règle d'Abel. Exemple. Théorèmes de comparaison. Application : développement asymptotique de la série harmonique. Contre-exemple à la positivité. Séries de Bertrand. Exemple. $\sum_{\{p \text{ premier}\}} (1/p)$. Comparaison logarithmique. Règle de Cauchy, de d'Alembert. Méthode de Raab-Duhamel. Application : formule de Stirling. TCSP. Application : nombre moyen de diviseurs.

III) Etude de séries semi-convergentes.

Critère de Leibniz, exemples. Application : approximation de Pi. Méthode d'Abel. Exemple. Groupement de termes. Exemple. Comparaison série/intégrale. Exemple. Théorème des séries alternées.

Les développements :

B7 : Théorème taubérien fort de Hardy-Littlewood

B22 : Développement asymptotique de la série harmonique

La bibliographie :

[Mo2]-[Go2]-[Pom]