245 – Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

Le plan :

I) Holomorphie.

1) Définition, premières propriétés.

Définition d'un développement en série entière en un point. Analycité, holomorphie. Conditions de Cauchy-Riemann. Structure d'anneau. Exemples et contre-exemple.

2) Formule de Cauchy, conséquences.

Indice d'une courbe en un point, valeur entière, exemples. Intégrale d'une fonction admettant une primitive sur un chemin fermé. Théorème de Goursat. Formule de Cauchy. Inégalité de Cauchy. Théorème de Liouville. Principe du maximum.

3) Propriétés des fonctions analytiques.

Principe du prolongement analytique. Application : lacunes de Hadamard. Principe des zéros isolés. Exemple de prolongement : fonction Γ d'Euler. Intégrité de $\mathcal{H}(\Omega)$ si Ω connexe.

II) Méromorphie.

1) Singularités, résidus, intégrales.

Série de Laurent sur une couronne. Convergence uniforme sur tout compact (UC). Méromorphie. Types de singularités. Casorati-Weierstrass. Résidu. Théorème des résidus. Exemple de calcul d'intégrale.

2) Factorisation de Weierstrass.

Théorème de Weierstrass. Etude de $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Calcul de résidu. Exemple de la fonction Γ d'Euler.

III) Espace $\mathcal{H}(\Omega)$.

1) Propriétés topologiques.

CUC. Distance. Topologie d'espace complet. Théorème de Weierstrass. Localement borné. Théorème de Montel.

2) Espace de Bergman.

Définition. Structure hilbertienne. Exemple de base hilbertienne. Noyau de Bergman.

Les développements :

B11 : Espace de Bergman.
B18 : Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler à $\mathbb{C}$.
B30 : Un calcul d'intégrale par la méthode des résidus.
B31 : Théorème des lacunes de Hadamard.

La bibliographie :

[BMP]-[Car]-[Rud]-[TaC]-[BaM]-[ZuQ]