246 – Séries de Fourier. E&A.

Le plan :

I) Définitions et espace $L^2(\mathbb{T})$.

Définition de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, indentification à $\mathcal{C}_{2.Pi}(\mathbb{T})$. Définition de $L^2(\mathbb{T})$, structure hilbertienne. Base hilbertienne. Coefficient de Fourier. Remarques. Somme partielle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Définition de $L^1(\mathbb{T})$. Egalité de Parseval. Convolution dans $L^1(\mathbb{T})$.

II) Problèmes de convergence.

Convergence L^2. Non-convergence simple. Théorème de Jordan-Dirichlet. Convergence simple dans le cas $\mathcal{C}_m^1$. Noyau de Dirichlet, noyau de Fejér. Propriétés et lien avec la convolution. Convergence. Théorème de Fejér. Exemple de fonctions somme de leur série de Fourier.

III) Applications.

Une fonction holomorphe sur Ω est analytique sur Ω. Lemme des moyennes circulaires. Lecture de la régularité d'une fonction sur la décroissance de ses coefficients de Fourier. Exemples. Lien avec la transformée de Fourier : formule sommatoire de Poisson. Formule de Green-Riemann. Inégalité isopérimétrique.

Les développements :

B6 : Théorème de Fejér
B16 : Série de Fourier d'une fonction continue qui diverge

La bibliographie :

[Pom]-[Go2]-[BMP]