Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

Romain Giuge

Définition 1. On appelle suite numérique toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Le terme $u(n)$ est appelé n-ième terme de la suite et est noté u_n. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite u.

Dans cette leçon, toutes les suites considérées seront des suites numériques.

1 Suites et nombres réels

1.1 Suites convergentes

Définition 2. Une suite (u_n) est dite convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Dans ce cas, il n'existe qu'un seul l vérifiant cette propriété et on dit que l est la limite de (u_n).

Exemple 3. *La suite* $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *a pour limite* 1.

Exemple 4 (Cesàro)**.** *Soit une suite convergente* (u_n)*. Alors la suite définie par* $v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$ *est convergente de même limite que* (u_n)*.*

1.2 Suites de Cauchy

Définition 5. Une suite (u_n) est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p, q \geqslant N$, $|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$.

Proposition 6. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Proposition 7. *L'ensemble des suites de Cauchy de* $\mathbb{Q}$ *est un anneau.*

Exemple 8. $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ *définit une suite de Cauchy de* $\mathbb{Q}$ *divergente dans* $\mathbb{Q}$*.*

Définition 9 (Une construction du corps des réels)**.** On définit $\mathbb{R}$ comme étant l'anneau des suites de Cauchy quotienté par l'idéal des suites de limite nulle. Ainsi construit, $\mathbb{R}$ est complet et possède les propriétés qu'on lui connaît.

Théorème 10. *Une suite de réels* (u_n) *est convergente ssi elle est de Cauchy.*

Exemple 11. *La suite définie par* $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ *n'est pas de Cauchy (on montre que* $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$*), donc diverge.*

Conséquence :

Théorème 12. *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

1.3 Suites monotones, suites bornées

Définition 13. (u_n) est dite croissante si pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$, décroissante si pour tout n, $u_n \geqslant u_{n+1}$. Elle est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Définition 14. (u_n) est dite majorée s'il existe $M > 0$ tel que pour tout n, $u_n \leqslant M$. On définit de façon similaire une suite minorée et une suite bornée.

Théorème 15. *Une suite croissante et majorée converge et a pour limite la borne supérieure de l'ensemble des* u_n*.*

Théorème 16. *Deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et que* $v_n - u_n \to 0$*. Dans ce cas, elles sont convergentes et convergent vers la même limite.*

Exemple 17. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$ *définissent des suites adjacentes.*

Définition 18. Soit une suite (u_n). On pose $v_n = \sup_{k \geqslant n} u_k$. Alors (v_n) est décroissante, donc soit elle converge vers l, soit elle tend vers $-\infty$. Sa limite, qui existe toujours, est appelée limite supérieure de (u_n). On définit de manière analogue la limite inférieure de (u_n).

Théorème 19. *Une suite* (u_n) *converge dans* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *ssi ses limites inférieures et supérieures sont égales, et dans ce cas sa limite est égale à cette valeur commune.*

Exemple 20. *La limite supérieure de* $((-1)^n)$ *vaut* 1 *et celle inférieure vaut* -1*, la suite diverge.*

1.4 Suites extraites et compacts

Définition 21. On appelle suite extraite de (u_n) toute suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. Toute limite d'une suite extraite d'une suite (u_n) est appelée valeur d'adhérence de (u_n).

Théorème 22. *Une suite admettant une unique valeur d'adhérence dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *converge vers cette valeur.*

Application 23. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}$ et (r_n) une suite convergeant vers α, avec pour tout n, $r_n = \frac{p_n}{q_n}$, $p_n \in \mathbb{N}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$ premier avec p_n. Alors $\lim p_n = \lim q_n = \infty$.

Théorème 24 (Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.*

Définition 25. Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que E est compacte si de toute suite d'éléments de E on peut extraire une suite qui converge dans E.

Application 26. Soit f une fonction réelle continue sur un compact K de $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur K.

Application 27. Soit f une fonction réelle continue sur un compact K de $\mathbb{R}$. Alors f est uniformément continue sur K.

1.5 Approximation des réels par les suites

Théorème 28 (Développement en base p)**.** *Soient un réel* $x \in [0, 1[$ *et un entier* $p \geqslant 2$*. Alors il existe une unique suite* $(x_n)_{n \geqslant 1}$ *à valeurs dans* $\{0, \dots, p-1\}$ *telle que* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n}$ *et l'ensemble* $\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, x_n \neq p-1\}$ *est infini. La somme* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n}$ *est appelée développement propre de* x *en base* p*.*

Corollaire 29. $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Corollaire 30. $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

Exemple 31. *La suite de rationnels* $\left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)$ *(développement décimal tronqué) converge vers* x*. Vitesse de convergence :* $\frac{1}{10^n}$*. On peut souvent faire mieux, comme la suite* (u_n) *de l'exemple 17 convergeant vers e à la vitesse* $\frac{1}{nn!}$*.*

2 Suites récurrentes

2.1 Définition et exemples

Définition 32. Une suite (u_n) est dite récurrente d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ s'il existe une application de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \geqslant k$, $u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-k})$.

Proposition 33. *Si (u_n) telle que $u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-k})$ converge vers une limite l et que f est continue au point $(l, \dots, l)$, alors $l = f(l, \dots, l)$.*

Exemple 34. *On a les familles suivantes de suites récurrentes classiques :*

(i) Les suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + r$.

(ii) Les suites géométriques : $u_{n+1} = qu_n$.

(iii) Les suites récurrentes linéaires à coefficients constants : $u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_k u_{n-k}$ avec $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Exemple : la suite de Fibonacci définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = F_1 = 1$.

Note : on sait pour chacune exprimer (u_n) en fonction de n.

Théorème 35 (Monotonie des suites récurrentes d'ordre 1)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.*

(i) Si f est croissante, alors (u_n) est monotone de monotonie donnée par le signe de $u_1 - u_0$. Exemple : étude avec $f(x) = \sqrt{1+x}$, la suite (u_n) converge vers le nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(ii) Si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante et les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie inverse. Exemple : étude avec $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, la suite (u_n) converge vers le nombre d'or Φ.

2.2 Applications en analyse numérique

Théorème 36 (Méthode du point fixe)**.** *Soient I segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| < k$. Alors f possède un unique point fixe λ et toute suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 \in I$ converge vers λ. Si on suppose $K = f'(\lambda) > 0$ et $x_n > \lambda$ pour n assez grand, alors il existe $c > 0$ tel que $x_n - \lambda \sim cK^n$.*

Théorème 37 (Méthode de Newton)**.** *Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable au voisinage de a avec $f(a) = 0$, $f'(a) \neq 0$ et f'' bornée. Alors la suite définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge quadratiquement vers a pour x_0 assez proche de a.*

Proposition 38 (Méthode de Newton, complément)**.** *On suppose de plus f deux fois dérivable sur tout I, convexe et $f'(a) > 0$. Alors tout $x_0 \geqslant a$ convient.*

Exemple 39. *Soient $y > 0$ et $f : x \mapsto x^2 - y$. Alors la suite définie par $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right)$ converge quadratiquement vers $\sqrt{y}$ pour tout $x_0 \geqslant \sqrt{y}$ (notamment pour $x_0 \geqslant \max(y, 1)$).*

Exemple 40. *Soit $f : x \mapsto \arctan(x)$. La solution de $f(x) = 0$ est $x = 0$. Méthode de Newton : on considère $x_{n+1} = x_n + (1 + x_n^2)\arctan(x_n)$. Si $\arctan(|x_0|) > \frac{2|x_0|}{1+x_0^2}$, $(|x_n|)$ croît strictement, donc (x_n) diverge.*

3 Quelques utilisations des suites

3.1 Comparaison de suites

Définition 41. Soient u et v deux suites. On dit que :

(i) u est dominée par v si $\exists M>0,\ \forall n,\ |u_n| \leqslant M|v_n|$. On note $u = O(v)$.

(ii) u est négligeable devant v si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$. On note $u = o(v)$.

(iii) u est équivalente à v si $u - v = o(v)$.

Application 42 (Vitesse de convergence)**.** La suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$ converge vers 0. On a de plus, $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Théorème 43 (Formule de Stirling)**.** *On a l'équivalent suivant :* $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

3.2 Convergence des séries

Définition 44. Soit une suite (u_n). On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_n$ converge, et diverge sinon.

Proposition 45. *La suite* (u_n) *converge ssi la série* $\sum(u_{n+1} - u_n)$ *converge.*

Théorème 46 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit une suite* (u_n) *à termes* > 0 *telle que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to k$. *Si* $k < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge, et si* $k > 1$, *elle diverge.*

Théorème 47 (Règle de Cauchy)**.** *Soit une suite* (u_n) *à termes* $\geqslant 0$. *Soit* $L = \limsup \sqrt[n]{u_n}$. *Si* $L < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge, et si* $L > 1$, *elle diverge.*

Exemple 48. $\sum \frac{x^n}{n!}$ *converge (d'Alembert), et* $\sum \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}$ *converge (Cauchy).*

Proposition 49 (D'Alembert $\Rightarrow$ Cauchy)**.** *Soit une suite* (u_n) *à termes* > 0. *Si* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *a une limite* l, *alors* $\sqrt[n]{u_n} \to l$.

Exemple 50. *Réciproque fausse :* $u_n = 2^{(-1)^n - n}$.

3.3 Calcul approché d'intégrales

Proposition 51 (Approximation par des sommes de Riemann)**.** *Soient* $[a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. *La convergence est de l'ordre de* $\frac{1}{n}$.

Exemple 52. *On peut se servir de cette proposition pour calculer des limites de suites, lorsqu'on sait calculer l'intégrale :* $\lim \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$, $\lim \sqrt[n]{\frac{(n+1)\dots(n+n)}{n^n}} = \frac{4}{e}$.

Proposition 53. *On a d'autres méthodes convergeant plus rapidement :*

(i) Riemann point milieu : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$. *Convergence en* $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(ii) Méthode des trapèzes : convergence en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(iii) Méthode de Simpson : convergence en $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Développements :

1. Méthode de Newton (théorème 37 et proposition 38).
2. Preuve probabiliste de la formule de Stirling (théorème 43).

Références :

– Jean Combes - *Suites et séries.*

– Alain Pommellet - *Agrégation de mathématiques, Cours d'analyse.*