Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

Romain Giuge

1 Eléments pour l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

1.1 Premières propriétés

Proposition 1. *Si (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une limite l et que f est continue en l, alors $l = f(l)$.*

Théorème 2 (Monotonie des suites récurrentes d'ordre 1)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.*

(i) Si f est croissante, alors (u_n) est monotone de monotonie donnée par le signe de $u_1 - u_0$. Exemple : étude avec $f(x) = \sqrt{1+x}$, la suite (u_n) converge vers le nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(ii) Si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante et les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie inverse. Exemple : étude avec $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, la suite (u_n) converge vers le nombre d'or Φ.

Théorème 3 (Un critère de convergence)**.** *(dans FGN1 page 86) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors (u_n) converge ssi $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$.*

1.2 Suites classiques

Exemple 4. *On a les familles suivantes de suites récurrentes d'ordre 1 classiques :*

(i) Les suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + r$.

(ii) Les suites géométriques : $u_{n+1} = qu_n$.

(iii) Les suites homographiques : $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$ avec $ad - bc \neq 0$. Ces suites ne sont pas nécessairement définies pour tout n.

Proposition 5 (Expression des suites homographiques)**.** *Soit (u_n) vérifiant $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$ avec $ad - bc \neq 0$. On considère l'équation $\frac{ax+b}{cx+d} = x$.*

(i) Si elle admet deux racines distinctes α et β, alors $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k^n \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$ où $k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c} = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d}$.

(ii) Si elle admet une racine double α, alors $\frac{1}{u_n-\alpha} = \frac{1}{u_0-\alpha} + kn$ où $k = \frac{c}{a-\alpha c} = \frac{2c}{a+d}$.

Théorème 6 (Convergence des suites homographiques)**.** *On reprend le cadre précédent. On note $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$. Alors :*

(i) Si $\Delta < 0$, (u_n) diverge.

(ii) Si $\Delta > 0$: si $u_0 = \alpha$ ou β, (u_n) stationne. Sinon si $|k| < 1$ (resp. $|k| > 1$), (u_n) converge vers α (resp. vers β). Si $k = -1$, (u_n) diverge.

(iii) Si $\Delta = 0$, (u_n) converge toujours vers α.

Exemple 7. *Illustration des 3 cas du théorème :*

(i) Soient $u_0 \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$. Alors (u_n) est bien définie et est 4-périodique.

(ii) Soient $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}$. Alors (u_n) est bien définie et converge vers $\sqrt{3}$.

(iii) Soient $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$. Alors (u_n) est bien définie et converge vers 1.

1.3 Développements asymptotiques de suites itératives réelles

Nous allons voir avec des exemples quelques techniques pour déterminer des équivalents et développements asymptotiques pour des suites définies par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 8 (Cesàro)**.** *Soit une suite convergente (u_n). Alors la suite définie par $v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$ est convergente de même limite que (u_n).*

Exemple 9. *Si on trouve $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \to l \neq 0$, alors par la convergence de Cesàro, on a $u_n \sim (nl)^{\frac{1}{\alpha}}$. Avec $u_{n+1} = \sin(u_n)$, on trouve $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.*

Exemple 10. *(dans FGN1 page 100) Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. On montre que (u_n) est croissante, que $u_n \to \infty$, puis comme $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}$, par Cesàro, $u_n \sim \sqrt{2n}$.*

On a plus généralement :

Proposition 11. *(dans FGN1 page 99) Soient $c > 0$ et $f : [0,c] \to [0,c]$ une fonction continue telle que $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ avec $a > 0$ et $\alpha > 1$. Alors la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0 si u_0 est assez petit. Dans ce cas, on a $u_n \sim \big(na(\alpha-1)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.*

Exemple 12 (Réinjection)**.** *(dans Gourdon page 200) On peut déterminer le développement asymptotique d'une suite en réinjectant celui-ci dans $u_{n+1} = f(u_n)$. Avec $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}$, on commence par montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$, puis en réinjectant, on aboutit à $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$, et on pourrait recommencer pour pousser le développement asymptotique aussi loin qu'on le souhaite.*

2 Points fixes et vitesse de convergence

Définition 13. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers l. On suppose que $u_n \neq l$ pour tout n. Si la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\right)$ est convergente de limite λ, on dit que la convergence de (u_n) vers l est

(i) lente si $\lambda = 1$. Exemple : $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$.

(ii) géométrique si $\lambda \in]0,1[$. Exemple : (λ^n).

(iii) rapide si $\lambda = 0$. Exemple : $\left(\frac{1}{n!}\right)$.

Définition 14. On dit que (u_n) converge quadratiquement vers l si $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{(u_n-l)^2}\right|\right)$ converge vers une limite finie.

2.1 Convergence vers un point fixe

Définition 15. Un point fixe a de f est dit :

(i) Attratif s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x_0 \in V$, $x_n \to a$.

(ii) Répulsif s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x_0 \in V \backslash \{a\}$, x_n sort de V. La suite ne peut converger vers a que si elle devient stationnaire sur a.

Théorème 16 (Classification des points fixes)**.** *Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(I,I)$. Soit $a \in I$ tel que $f(a) = a$. Alors a est :*

(i) Attratif si $|f'(a)| < 1$.

(ii) Super-attractif si $f'(a) = 0$: la convergence est rapide.

(iii) Répulsif si $|f'(a)| > 1$.

(iv) Indéterminée si $|f'(a)| = 1$.

Exemple 17. *Pour $f(x) = \sin(x)$, $|f'(0)| = 1$ et 0 est attractif. Pour $f(x) = \mathrm{sh}(x)$, $|f'(0)| = 1$ et 0 est répulsif.*

Théorème 18 (Méthode du point fixe)**.** *(dans Pommelet) Soient I segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| < k$. Alors f possède un unique point fixe λ et toute suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 \in I$ converge vers λ. Si on suppose $K = f'(\lambda) > 0$ et $x_n > \lambda$ pour n assez grand, alors il existe $c > 0$ tel que $x_n - \lambda \sim cK^n$.*

2.2 Exemple de convergence quadratique

Théorème 19 (Méthode de Newton)**.** *Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable au voisinage de a avec $f(a) = 0$, $f'(a) \neq 0$ et f'' bornée. Alors la suite définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge quadratiquement vers a pour x_0 assez proche de a.*

Proposition 20 (Méthode de Newton, complément)**.** *On suppose de plus f deux fois dérivable sur tout I, convexe et $f'(a) > 0$. Alors tout $x_0 \geqslant a$ convient.*

Exemple 21. *Soient $y > 0$ et $f : x \mapsto x^2 - y$. Alors la suite définie par $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right)$ converge quadratiquement vers $\sqrt{y}$ pour tout $x_0 \geqslant \sqrt{y}$ (notamment pour $x_0 \geqslant \max(y, 1)$).*

Exemple 22. *Soit $f : x \mapsto \arctan(x)$. La solution de $f(x) = 0$ est $x = 0$. Méthode de Newton : on considère $x_{n+1} = x_n + (1 + x_n^2)\arctan(x_n)$. Si $\arctan(|x_0|) > \frac{2|x_0|}{1+x_0^2}$, $(|x_n|)$ croît strictement, donc (x_n) diverge.*

3 Résolution approchée de systèmes linéaires

(dans Filbet)

3.1 Méthodologie générale

On considère $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $b \in K^n$. On cherche une approximation de $x \in K^n$ solution de $Ax = b$. Pour cela, on pose $A = M - N$ où M est inversible et on considère la suite itérative $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b \quad (*)$. On notera pour la suite $B = M^{-1}N$.

Définition 23. On dit que l'algorithme itératif $(*)$ converge si pour tout $b \in K^n$ et tout $x_0 \in K^n$, la suite (x_k) converge vers la solution $x = A^{-1}b$, *i.e.* $\lim \|x_k - x\| = 0$.

Définition 24 (Erreur)**.** On note $e_k = x_k - x$ l'erreur sur x à la k-ième itération. Alors $e_{k+1} = Be_k$. L'algorithme $(*)$ converge donc si pour tout e_0, $\lim B^k e_k = 0$.

Théorème 25 (Critères de convergence)**.** *Soit $B \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour une norme matricielle subordonnée quelconque, on a $\lim \|B^k\| = 0$.

(ii) Pour tout $v \in K^n$, on a $\lim B^k v = 0$.

(iii) Le rayon spectral de B vérifie $\rho(B) < 1$.

(iv) Il existe une norme matricielle subordonnée (dont le choix dépend de B) telle que $\|B\| < 1$.

Définition 26 (Résidu et test d'arrêt)**.** Soit $r_k = b - Ax_k$ le résidu d'ordre k. Pour une précision donnée ε, on poursuit les itérations jusqu'à ce que $\frac{\|r_k\|}{\|b\|} \leqslant \varepsilon$.

Remarque 27. Si on connaît la valeur de $\|B\| < 1$, on peut aussi calculer le nombre d'itérations maximal en fonction de l'erreur $e_k = B^k e_0$ souhaitée. En effet, $\|e_k\| \leqslant \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|x_1 - x_0\|$.

Théorème 28. *Soit A symétrique définie positive admettant la décomposition $A = M - N$ avec M inversible. Alors si ${}^tM + N$ est symétrique définie positive, on a $\rho(M^{-1}N) < 1$. Par conséquent l'algorithme $(*)$ converge.*

3.2 Méthode de Jacobi

Définition 29 (Méthode de Jacobi)**.** On choisit la décomposition de A où M est la diagonale de A et $N = M - A$. La méthode n'est pas toujours bien définie car A peut avoir des coefficients diagonaux nuls.

Théorème 30. *On suppose A à diagonale strictement dominante, i.e. $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour tout i. Alors pour tout x_0, la suite (x_k) donnée par la méthode de Jacobi est bien définie et converge vers la solution x du système $Ax = b$.*

3.3 Méthode de Gauss-Seidel

Définition 31 (Méthode de Gauss-Seidel)**.** On choisit la décomposition de A où M est le triangle inférieur de A et $N = M - A$.

Théorème 32. *Si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Gauss-Seidel converge.*

Théorème 33. *Si A est symétrique réelle définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge.*

Théorème 34. *On suppose A tridiagonale. Alors les rayons spectraux de la matrice B pour les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel sont liés par $\rho(B_{Gauss\text{-}Seidel}) = \rho(B_{Jacobi})^2$. Ainsi les deux méthodes convergent ou divergent simultanément. Lorsqu'elles convergent, la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement.*

Remarque 35. Il existe des matrices A pour lesquelles la méthode de Jacobi converge et pas celle de Gauss-Seidel.

Développements :

1. Méthode de Newton (théorème 19 et proposition 20).
2. Méthode de Gauss-Seidel (théorèmes 32 et 33).

Références :

- Alain Pommellet - *Agrégation de mathématiques, Cours d'analyse.*
- Xavier Gourdon - *Analyse.*
- Filbet - *Analyse numérique, Algorithme et étude mathématique.*
- Francinou, Gianella, Nicolas - *Oraux X-ENS, Analyse 1.*
- Mohammed El Amrani - *Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions.*