Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

Romain Giuge

Dans toute cette leçon, sauf mention du contraire, A désigne une partie de $\mathbb{R}$, a un élément de A, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.

1 Continuité

[AF p108]

1.1 Points de continuité

Définition 1. On dit que :

(i) f est continue en a si pour tout voisinage W de $f(a)$, il existe un voisinage V de a tel que $f(V \cap A) \subset W$.

(ii) f est continue à droite (resp. à gauche) en a si la restriction de f à $A \cap [a, +\infty[$ (resp. $A \cap]-\infty, a]$) est continue en a.

(iii) f est continue (resp. continue à droite, continue à gauche) sur A si f est continue (resp. continue à droite, continue à gauche) en tout point de a.

Exemple 2. *Si D est une partie discrète de $\mathbb{R}$ (par exemple $D = \mathbb{Z}$), toute application $f : D \to \mathbb{R}$ est continue.*

La fonction partie entière est continue à droite sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

[ZQ p258]

Proposition 3. *L'ensemble des points de continuité d'une fonction est une intersection dénombrable d'ouverts.*

Application 4. Il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{Q}$ discontinue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Exemple 5. *Il existe une fonction f continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ discontinue sur $\mathbb{Q}$: $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ fraction irréductible.*

[AF p190]

Définition 6. Si f est définie sur $A \backslash \{a\}$ et admet une limite l en a, on appelle prolongement par continuité de f la fonction $\tilde{f}$ égale à f sur $A \backslash \{a\}$ et valant l en a.

[P p82]

1.2 Points de discontinuité

Définition 7. On dit que :

(i) f possède une discontinuité de première espèce en a si f n'est pas continue en a et admet une limite à droite et une limite à gauche en a (si on peut envisager celles-ci).

(ii) f possède une discontinuité de deuxième espèce si f n'est pas continue en a et que la discontinuité n'est pas de première espèce.

Exemple 8. *Une fonction monotone ne possède que des discontinuités de première espèce : par exemple si f est croissante, on a $f(a-0) = \sup\{f(x), x < a\}$ et $f(a+0) = \inf\{f(x), x > a\}$.*

En revanche $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ possède une discontinuité de deuxième espèce en 0.

Définition 9. On dit qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est :

(i) *réglée* si elle n'admet que des discontinuités de première espèce.

(ii) *continue par morceaux* si dans chaque segment de A, la fonction f ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité, et que ces derniers sont tous de première espèce.

Proposition 10. *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable.*

Exemple 11. *Les discontinuités d'une fonction monotone ne sont pas nécessairement isolées. Elles peuvent même constituer un ensemble dense, comme par exemple celles de la fonction* $f(x) = \sum_{\{n/r_n \leqslant x\}} \frac{1}{2^n}$*, où* r_n *est une énumération de l'ensemble des rationnels. Cette fonction* f *est croissante et discontinue en tout rationnel.*

Proposition 12. *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est dénombrable.*

Exemple 13. *La fonction définie sur* $[0,1]$ *par* $f(x) = \frac{1}{q}$ *si* $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *(fraction irréductible) et* $f(x) = 0$ *sinon, possède l'ensemble* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ *comme ensemble de points de discontinuité.*

1.3 Quelques caractérisations de la continuité

[AF p110]

Théorème 14 (Caractérisation séquentielle)**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est continue en* a.

(ii) Pour toute suite (x_n) *de points de* A *qui converge vers* a*, on a* $f(x_n) \to f(a)$.

(iii) Pour toute suite (x_n) *de points de* A *qui converge vers* a*, la suite* $(f(x_n))$ *converge.*

[P p83]

Théorème 15 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Si* f *est continue, l'image par* f *de tout intervalle de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Application 16. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$. Ce résultat est à la base de la méthode de dichotomie permettant de donner une valeur approchée d'un zéro d'une fonction continue.

Théorème 17. *Si* f *est continue sur l'intervalle* I, f *est injective ssi* f *est strictement monotone.*

Des deux théorèmes précédents, nous pouvons déduire le suivant :

Théorème 18. *Si* f *est croissante sur* I*, alors* f *est continue ssi l'image de* f *est un intervalle.*
Si f *est une bijection continue de* I *sur* J*, alors* f^{-1} *est continue.*

2 Dérivabilité

2.1 Définition et conséquences

[AF p231]

Définition 19. On dit que f est *dérivable* en a si $\lim_{x\to a, x\in A\setminus\{a\}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. Lorsqu'elle existe, la limite est notée $f'(a)$. On définit de même *dérivable à droite* en a et *dérivable à gauche* en a, qu'on note respectivement quand les limites existent, $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.

Conséquence immédiate :

Proposition 20. *La dérivabilité en a (resp. dérivabilité à droite, à gauche) entraîne la continuité en a (resp. continuité à droite, à gauche).*
La réciproque est fausse : $x \mapsto |x|$ *n'est pas dérivable en* 0.

[AF p231]

Exemple 21. *Soient I intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors f est dérivable à gauche et à droite sur I et pour tout $x, y \in I$, $x < y$, on a $f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y)$.*

De plus, f est continue sur I et on a $f'_g(x) = f'_d(x)$ (et donc f dérivable en x) sauf sur un ensemble au plus dénombrable.

Exemple 22 (Dérivée d'une fonction réciproque)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ bijective et dérivable. Alors f^{-1} n'est pas nécessairement dérivable : par exemple $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$. En revanche, si f' ne s'annule pas, f^{-1} est dérivable.*

[P p90]

2.2 Prolongement

Théorème 23. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $a \in I$. Si f est dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et si f' possède une limite l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.*

Exemple 24. *L'hypothèse de continuité est nécessaire : $f(x) = x$ si $x \leqslant$ et $x + 1$ si $x > 0$ n'est pas dérivable en 0 même si les limites de f' à droite et à gauche coïncident.*

Remarque 25. Le théorème s'adapte immédiatement au cas des dérivées à droite ou à gauche : si f' possède une limite l à droite en a, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

Corollaire 26. *La dérivée d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur tout I ne possède que des discontinuités de deuxième espèce (si f admet une limite à droite en a, c'est nécessairement $f'(a)$, pareil à gauche).*

Exemple 27. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' admet une discontinuité de deuxième espèce en 0.*

[P p92]

Application 28. Une fonction dont la dérivée est réglée est de classe $\mathcal{C}^1$.

[AF p190]

Théorème 29. *Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable à droite sur $]a, b[$. Si f'_d est bornée, alors $\lim_{x \to a} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, i.e. on peut prolonger f par continuité en a.*

Si de plus $f'_d(x) \to l$ quand $x \to a$, le prolongement de f est dérivable à droite en a.

[AF p175]

2.3 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 30. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur I s'il existe une suite finie $f_0, \ldots, f_n$ de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f_0 = f$ et pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, f_i est dérivable et $f'_i = f_{i+1}$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ si elle est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ est continue. On dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 31 (Formule de Leibniz)**.** *Si f et g sont n fois dérivables en a, le produit fg aussi et on a $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$.*

[R p359]

Proposition 32 (Fonction plateau)**.** *Soient a, b, c, d quatre réels avec $a < b < c < d$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur $[b, c]$ et nulle en dehors de $[a, d]$.*

Théorème 33 (Borel)**.** *Soit (a_n) une suite quelconque de réels. Alors il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Conséquence : il existe des fonctions différentes de la somme leur série de Taylor sur tout voisinage de 0.

Exemple 34. *Par le théorème de Borel, il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(n)}(0) = (n!)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série de Taylor de u est $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ de rayon de convergence égal à 0.*

3 Liens entre continuité et dérivabilité

3.1 Quelques faits et exemples

[P p85]

Exemple 35. *Une fonction peut être dérivable en* n *points* $x_1, \ldots, x_n$ *(en particulier continue en ces points), et nulle part continue ailleurs. En effet, prenons* $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$*. On a* $f(x) - f(x_i) = O\left((x - x_i)^2\right)$*.*

[ZQ p263]

Proposition 36. *Soit* E *l'ensemble des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$*, muni de la norme infinie. Alors le sous-ensemble* A *de* E *des fonctions continues sur* $[0,1]$ *et nulle part dérivables est dense dans* E*.*

[P p85]

Exemple 37. *Soit* g *la fonction 2-périodique dont la restriction à* $[-1,1]$ *est* $|x|$*. La fonction* $f : x \mapsto \sum_{n=0} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et dérivable en aucun point de* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 38. *Une fonction monotone est dérivable presque partout.*

Conséquence : il existe des fonctions continues sur $[0,1]$ *qui ne sont monotones sur aucun sous-intervalle non trivial.*

3.2 Les grands théorèmes

[P p85]

Théorème 39 (Rolle)**.** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$*, dérivable sur* $]a,b[$*, telle que* $f(a) = f(b)$*. Alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$*.*

Application 40. Si P est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' l'est également.

Théorème 41 (Rolle généralisé)**.** *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *continue, nulle en* a *et telle que* $f(x) \to 0$ *quand* $x \to +\infty$*. Si* f *est dérivable sur* $]a, +\infty[$*, alors* f' *s'annule sur* $]a, +\infty[$*.*

Théorème 42 (Accroissements finis)**.** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$*, dérivable sur* $]a,b[$*. Alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$*.*

Corollaire 43. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *dérivable. Si* f' *est positive,* f *croît. Si de plus l'ensemble des zéros de* f' *est d'intérieur vide,* f *est strictement croissante.*

Exemple 44. *Il est important que* I *soit un intervalle :* f *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = -\frac{1}{x}$ *a une dérivée positive mais* $f(1) = -1 < f(-1) = 1$*, donc n'est pas croissante sur* $\mathbb{R}^*$*.*

Théorème 45 (Darboux)**.** *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *dérivable. Alors* $f'(I)$ *est un intervalle.*

Développements :

1. Théorème de Borel (proposition 32 et théorème 33).
2. Densité des fonctions continues et nulle part dérivables (proposition 36).

Références :

- Alain Pommellet - *Agrégation de mathématiques, Cours d'analyse* [P].
- J.M. Arnaudiès, H. Fraysse - *Cours de mathématiques 2, Analyse* [AF].
- Hervé Queffélec, Claude Zuily - *Eléments d'analyse, 2ème édition* [ZQ].
- F. Rouvière - *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation* [R].