Ellipsoïde de John-Loewner

<u>Déf</u> : Soit q une forme quadratique définie positive de $\mathbb{R}^n$.
L'ellipsoïde associé à q est $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 1\}$ (centré en 0)

<u>Th</u> : Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ tq $0 \in \mathring{K}$.
Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

<u>Démo</u> : • Calcul pour q fixé du volume V_q de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_q$.
$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne.
Puisque q est défini positive, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ orthonormée de $(\mathbb{R}^n, \langle | \rangle)$ et orthogonale pour q. Si $q(e_i) = a_i \in \mathbb{R}_+$, alors

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \quad \text{et} \quad Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

La mesure de Lebesgue est invariante par changement de coordonnées euclidienne donc :

$$V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_q} \, d\lambda_n = \int_{\mathcal{E}_q} d\lambda_n = \int_{\{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leq 1\}} dx_1 \dots dx_n$$

Le changement de variable $\varphi : x_i \longmapsto \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$ pour tout i (φ est bien un C^1-difféo) de jacobien $\frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$ permet d'écrire :

$$V_q = \int_{\{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leq 1\}} dx_1 \dots dx_n = \int_{\{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}} \frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} dx_1 \dots dx_n$$

D'autre part, le déterminant de q i.e. $\det(Mat_{\mathcal{B}}(q)) = a_1 \dots a_n$ qu'on note $D(q)$ ne dépend pas de la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. (si $\mathcal{B}'$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $\exists O \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ tel que $Mat_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tO \, Mat_{\mathcal{B}}(q) \, O$ d'où l'égalité des déts)
En notant V_0 le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne,
il vient $V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$

Le problème est ramené à montrer l'existence et l'unicité d'une forme quadratique ≥ 0 tel que $D(q)$ soit maximal et tq $\forall x \in K, \; q(x) \leq 1$

• Existence d'une telle forme quadratique.
Notons $\mathcal{Q}$ (resp $\mathcal{Q}_+$, $\mathcal{Q}_{++}$) l'ev (resp l'ens) des formes quadratiques (resp ≥ 0, déf ≥ 0)
On le munit de la norme $N : q \longmapsto \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|q(x)|}{\|x\|^2}$
On cherche à maximiser l'ensemble $A = \{q \in \mathcal{Q}_+ \mid \forall x \in K, \; q(x) \leq 1\}$

Montrons que A est un compact non vide de $\mathcal{Q}$.

$A \neq \emptyset$: Comme K est compact dans $\mathbb{R}^n$, $\exists M > 0$ tq $\forall x \in K$, $\|x\|_2 \leq M$

Alors $\tilde{q} : x \mapsto \frac{\|x\|_2^2}{M^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{M^2}$ est une forme quadratique ≥ 0

et $\forall x \in K$, $\tilde{q}(x) \leq 1$ donc $\tilde{q} \in A$

A fermé ? Soit $(q_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $q \in Q$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Alors $|q_n(x) - q(x)| \leq \|x\|^2 \cdot N(q_n - q) \longrightarrow 0$

donc $q_n(x) \longrightarrow q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Donc par passage à la limite, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$q(x) = \lim q_n(x) \geq 0$ et $q(x) = \lim q_n(x) \leq 1$ d'où $q \in A$

A borné : Puisque $0 \in \mathring{K}$, alors $\exists r > 0$ tel que $B_f(0, r) \subset K$

Soit $q \in A$: si $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| \leq r$

alors $x \in K$ donc pour x tel que $\|x\| \leq 1$,

$|q(x)| = |q(r \frac{x}{r})|$ $\| \, \| \leq r$ donc $\frac{x}{r} \in K$

$= \frac{1}{r}^2 \underbrace{|q(rx)|}_{\leq 1}$

$\leq \frac{1}{r^2}$ d'où $N(q) \leq \frac{1}{r^2}$ d'où A borné

Donc A est un compact non vide de Q (Q evn de dim finie car $\simeq S_n(\mathbb{R})$)

- Conclusion

L'application $D \begin{pmatrix} A \to \mathbb{R} \\ q \mapsto D(q) \end{pmatrix}$ est continue (cf 2° du déb)

Donc D atteint son maximum sur A en $q_0 \in A$, q_0 positif.

Puisque $D(\tilde{q}) = \left(\frac{1}{M^2}\right)^n > 0$, $D(q_0)$ est nécessairement > 0

ce qui assure que q_0 est une forme quadratique définie positive.

Il y a donc un ellipsoïde $\mathcal{E}_{q_0}$ de volume minimal qui contient K.

- Unicité de la forme quadratique

Montrons que A est convexe.

A convexe : Soient $(q, q') \in A^2$ et $t \in]0,1[$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$(tq + (1-t)q')(x) = tq(x) + (1-t)q'(x) \geq 0$ donc $tq + (1-t)q' \geq 0$

et $(tq + (1-t)q')(x) = tq(x) + (1-t)q'(x) \leq t + 1 - t \leq 1$

donc $tq + (1-t)q' \in A$ $\forall t \in]0,1[$ d'où la convexité.

Supposons que $\exists q_1 \in A$ tq $D(q_1) = D(q_0)$ avec $q_1 \neq q_0$

La convexité de A assure que $\frac{1}{2}(q_1 + q_0) \in A$

La log-concavité du déterminant assure que pour $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$,

$$D\left(\frac{1}{2}(q_1+q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_0) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_1))\right)$$

$$> \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_0))^{1/2} \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_1))^{1/2} = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_0)) = D(q_0)$$

ce qui contredit la définition de q_0

D'où l'unicité

<u>Lemme</u> : Soient A et B tq $A \neq B$ et $(A,B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2$

Soient $\alpha \in]0,1[$ et β tels que $\alpha + \beta = 1$

Alors $\det(\alpha A + \beta B) > \det(A)^{\alpha} \det(B)^{\beta}$

ie le déterminant est log-concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (qui est un cône et non un ev)

<u>Démo</u> : Le théorème de pseudo-réduction simultanée assure qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i > 0$ telles que

$$A = {}^tPP \quad \text{et} \quad B = {}^tPDP$$

Donc $\det(A)^{\alpha} \det(B)^{\beta} = (\det(P)^2)^{\alpha} (\det(P)^2 \det(D))^{\beta}$ $\quad \downarrow \alpha+\beta = 1$

$$= \det(P)^2 \det(D)^{\beta}$$

et $\det(\alpha A + \beta B) = \det(P^2) \det(\alpha I_n + \beta D)$

Il faut montrer que $\det(\alpha I_n + \beta D) \geq (\det(D))^{\beta}$

ie $\prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta \lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\beta} > 0$

ie $\sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i)$ par passage au log $(\alpha, \beta > 0)$

La concavité du logarithme assure que $\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \cancel{\alpha\ln(1)} + \beta\ln(\lambda_i)$ $\forall i$,

d'où l'inégalité large en sommant les n termes.

Enfin, $A \neq 0$ donc $\exists i_0$ tq que $\lambda_{i_0} \neq 1$ d'où l'inégalité stricte par stricte concavité du logarithme en i_0 d'où le résultat.

FGN Algèbre 3

Alessandri