Inégalité isopérimétrique

Def : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

- On appelle longueur de γ le réel $L = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$
- On appelle surface de γ le réel S égal à la mesure de Lebesgue de la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$.

Si $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$ avec γ orientée positivement ($I(\gamma, z) = 1$?) alors la formule de Green-Riemann assure que
$$S = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt$$

Th : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe continue, $\mathcal{C}^1$ (par morceaux), fermée ($\gamma(a) = \gamma(b)$), sans point double ($a \leq x_1 < x_2 \leq b$ tq $\gamma(x_1) = \gamma(x_2) \Rightarrow a = x_1$ et $b = x_2$) et régulière ($\forall t \in [a,b]$, $\gamma'(t) \neq 0$) de longueur L et de surface S.

Alors $L^2 \geqslant 4\pi S$

avec cas d'égalité ssi γ définit un cercle parcouru une fois

Rq : A périmètre donné, c'est le cercle qui enferme la plus grande surface.

Rmq : • Soit γ_0 vérifiant les hypothèses. On peut :

– se ramener à l'intervalle $[0,1]$ grâce au changement de paramétrage $f \left(\begin{array}{c} [0,1] \to [a,b] \\ t \mapsto bt + (1-t)a \end{array} \right)$ est une application f bijective tq f et f^{-1} soient $\mathcal{C}^1$

On pose $\gamma_1 = \gamma_0 \circ f$ qui vérifie les hypothèses en étant définie sur $[0,1]$

– se ramener à $|\gamma'(t)| = 1$ $\forall t \in [0,1]$ et $L = 1$.

L'abscisse curviligne $t \overset{s}{\longmapsto} \int_0^t |\gamma_1'(u)|\,du$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme bien définie car γ_1 est régulière ($s'(t) = |\gamma_1'(t)| > 0$)

On pose alors $g \left(\begin{array}{c} [0,1] \to [0,1] \\ t \mapsto \frac{1}{L} s(t) \end{array} \right)$ où g est un changement de paramétrage

On pose $\gamma_2 = \gamma_1 \circ g^{-1}$ et alors γ_2 vérifie bien les hypothèses et $L = 1$ et $|\gamma_2'(t)| = 1$ $\forall t \in [0,1]$

– se ramener à une courbe orientée positivement grâce au changement de paramétrage $h \left(\begin{array}{c} [0,1] \to [0,1] \\ t \mapsto 1-t \end{array} \right)$

On pose $\gamma = \gamma_2 \circ h$ et γ vérifie bien les hypothèses voulues.

- Soit γ une courbe de $[0,1]$ de longueur $L=1$ telque $|\gamma'(t)|=1$ $\forall t\in[0,1]$ orientée positivement qu'on prolonge en γ par 1-periodicité.

Alors $\gamma \in \mathcal{C}^1_{pm}$, $\mathcal{C}^0$ car γ fermée

Les coefficients de Fourier de γ et de γ' sont bien définis pour tout $n\in\mathbb{Z}$

$$c_n(\gamma) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t}\gamma(t)dt$$

et $c_n(\gamma') \overset{\circ}{=} \int_0^1 e^{-2\pi i n t}\gamma'(t)dt = 2\pi i n\, c_n(\gamma)$ après ipp

puisque γ et γ' sont continues par morceaux et 1-periodique.

L'égalité de Parseval s'applique à γ' car γ' est continue par morceaux et 1-periodique donc élément de $L^2([0,1])$. Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\gamma')|^2 = \int_0^1 \underbrace{|\gamma'(t)|^2}_{1}dt = 1 = L = L^2$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{n\in\mathbb{Z}}} 4\pi^2 n^2 |c_n(\gamma)|^2 \qquad \text{donc } L^2 = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\gamma)|^2$$

D'autre part, un corollaire de l'égalité de Parseval appliqué aux fonctions continues par morceaux 1-periodiques γ' et γ permet d'écrire $\int_0^1 \gamma'(t)\overline{\gamma(t)}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\gamma')\overline{c_n(\gamma)}$

On remarque aussi que $2S = \int_0^1 x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = \operatorname{Im}\left(\int_0^1 \gamma'(t)\overline{\gamma(t)}dt\right)$

d'où $2S = \operatorname{Im}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\gamma')\overline{c_n(\gamma)}\right)$

$2S = \operatorname{Im}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi i n\, \underbrace{c_n(\gamma)\overline{c_n(\gamma)}}_{|c_n(\gamma)|^2}\right)$ donc $S = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\gamma)|^2$

Donc $L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n^2-n)|c_n(\gamma)|^2$

s'écrit comme une somme de termes positifs d'où l'inégalité.

De plus, puisque $n^2-n>0$ ssi $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$,

l'égalité $L^2=4\pi S$ a lieu lorsque $c_n(\gamma)=0$ pour $n\neq 0,1$

Puisque γ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet assure que $\forall t\in[0,1]$, $\gamma(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\gamma)e_n$

Si l'égalité a lieu, γ vérifie $\gamma(t) = c_0(\gamma) + c_1(\gamma)e^{2\pi i t}$ pour $t\in[0,1]$

ce qui est exactement l'équation du cercle de centre $c_0(\gamma)$ et de rayon $|c_1(\gamma)|$ parcouru une fois.

Le résultat est démontré puisque la réciproque est claire.

Lemme : Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et T-périodiques.
Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}$ est absolument convergente et converge vers $\langle f|g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt$

Dmo : Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a

$$|c_k(f)\overline{c_k(g)}| = |c_k(f)|\cdot|c_k(g)| \leq \frac{1}{2}|c_k(f)|^2 + \frac{1}{2}|c_k(g)|^2$$

$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \geq 0$

Or, l'égalité de Parseval assure que :

- $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(f)|^2$ et $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(g)|^2$ converge absolument
- $S_n(f) \xrightarrow[n]{\|\cdot\|_2} f$ et $S_n(g) \xrightarrow[n]{\|\cdot\|_2} g$

Ceci assure la convergence de $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(f)\overline{c_k(g)}|$ et la continuité par rapport aux deux variables du produit hermitien $\langle\,|\,\rangle$ assure que $\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2$

$$\langle S_n(f)|S_m(g)\rangle \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} \langle f|g\rangle$$

Puisque (e_k) BON de $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, il vient

$$\langle S_n(f)|S_n(g)\rangle = \langle \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k \,|\, \sum_{p=-n}^{n} c_p(f)e_p\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{c_k(g)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

Rq : La limite $\langle S_n(f)|S_m(g)\rangle \longrightarrow \langle f|g\rangle$ peut aussi se déduire du théorème d'inversion $\int$-$\sum$ pour une converge absolue (donc uniforme) et intégration sur un compact.