Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie E

I Généralités

1) Définitions

Déf : Le groupe linéaire $(GL(E), \circ)$ est le groupe des applications linéaires bijectives de E dans E.

Pté : La donnée d'une base B de E permet de définir l'isomorphisme $\begin{pmatrix} GL(E) \to GL_n(K) \\ f \mapsto \mathrm{Mat}_B(f) \end{pmatrix}$

L'isomorphisme $GL(E) \simeq GL_n(K)$ n'est donc pas canonique mais permet l'étude de GL(E) via $GL_n(K)$.

Déf : $\det \begin{pmatrix} GL(E) \to K^* \\ f \mapsto \det(f) \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupes.
alors $\mathrm{Im}(\det) = K^*$ et $\mathrm{Ker}(\det) = \{f \in GL(E) / \det(f) = 1_K\}$
On appelle groupe spécial linéaire le noyau de det
comme pour GL(E), $SL(E) \simeq SL_n(K) = \{M \in GL_n(K) / \det(M) = 1\}$

Pté : comme pour GL(E), $SL(E) \simeq SL_n(K) = \{M \in GL_n(K) / \det(M) = 1\}$!

Rq att : $SL_n(K) \neq \{M \in M_n(K) / \det(M) = 1\}$!

Rq : En dimension finie ! pour $f \in \mathcal{L}(E)$, alors
f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

2) Quelques sous-groupes de GL(E)

Rq : $SL(E) \lhd GL(E)$ comme noyau de det ! $GL(E) = SL(E) \rtimes K^*$

Pté : Avec Z(G) désigne le centre d'un groupe G, alors
$Z(GL(E)) = K^* \mathrm{Id}_E \simeq \hat{K}^*$ et $Z(SL(E)) = Z(GL(E)) \cap SL(E)$

Déf : On définit $PGL(E) = GL(E)/Z(GL(E))$ et $PSL(E) = SL(E)/Z(SL(E))$
le groupe projectif linéaire de E et le groupe spécial linéaire de E.
Ce sont des sous-groupes de GL(E)

Déf : Supposons E euclidien, muni d'un produit scalaire $\langle\,\rangle$.
On appelle groupe orthogonal le sous-groupe de GL(E) noté $(O(E), \circ)$ formé des isométries de E ie des applications linéaires f tq $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in E$

Rq : On peut généraliser cette construction à tout ev E muni de φ forme sesquilinéaire (en particulier aux formes bilinéaires), non dégénérées.
Notamment, si φ est un produit hermitien, on définit le groupe unitaire de E.

Déf : On appelle groupe spécial orthogonal le sous-groupe de O(E) formé des isométries directes (ie de déterminant 1).

Rq : On a ainsi $O(E) \simeq O_n(K)$ et $SO(E) \simeq SO_n(K)$

II Étude algébrique de GL(E) et applications

1) Générateurs de GL(E)

Déf : Supposons $n \geq 2$ et soit H un hyperplan de E et soit $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = \mathrm{Id}_{|H}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $H = \mathrm{Ker}(f)$ et notons $\bar{u} \begin{pmatrix} E/H \to E/H \\ \bar{x} \mapsto \overline{u(x)} \end{pmatrix} : \bar{u} \in GL(E/H)$.

- u est une transvection d'hyperplan H et de droite D si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :
  - $\bar{u} = \mathrm{Id}_{E/H}$
  - $\det(u) = 1$ ie $u \in SL(E)$
  - u n'est pas diagonalisable ($Sp(u) = \{1\}$)
  - $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \subset H$, on pose $D := \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) = E_1$
  - $\exists a \in H \setminus \{0\}$ tq $u(x) = x + a f(x)$ $\forall x \in E$
  - Dans une base convenable, $\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
- u est une dilatation d'hyperplan H de rapport λ, de droite D si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :
  - $\bar{u} \neq \mathrm{Id}_{E/H}$ $\quad E = H \oplus D$
  - $\det(u) = \lambda \neq 1$ ie $u \notin SL(E)$
  - u est diagonalisable
  - $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \not\subset H$
  - Dans une base convenable, $\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

(Ppté : Un élément qui laisse toutes les droites vectorielles invariantes est une homothétie)

Coro : $Z(GL_n(K)) = K^* I_n$ (ie les homothéties)

Th : Les transvections engendrent $SL(E)$

Coro : Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$

Appli 1 : Pour démontrer la connexité de … Il suffit de restreindre l'étude aux transvections/dilatations

Appli 2 : ?

2) Actions de groupes et représentations

i) Th. de Sylow

Déf : Une action de groupe de G sur un ensemble X est la donnée d'un morphisme de groupe $\varphi\left(\begin{array}{l} G \to S(X) \\ g \mapsto \varphi_g \left(x \mapsto g(x) \right) \end{array}\right)$ où $S(X)$ = bijections de X

Th de Cayley : Pour G groupe d'ordre n, G s'injecte dans S_n (via l'action par conjugaison) i.e isomorphe à $H < S_n$

Ppté : Il existe une injection de S_n dans $GL(\mathbb{F}_q)$ $\forall q = p^\alpha$, via le morphisme $\varphi\left(\begin{array}{l} S_n \to GL_n(\mathbb{F}_q) \\ \sigma \mapsto Mat(\sigma) \end{array}\right)$ où $Mat(\sigma)$ est la matrice de permutation associée à σ i.e. $Mat(\sigma) = (m_{ij})$, $m_{i\sigma(i)} = 1$ et 0 sinon

Rq : $\det(Mat(\sigma)) = \varepsilon(\sigma)$

Ppté : Soit $K = \mathbb{F}_q$ un corps fini. Alors :
$|GL(E)| = |GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1) \cdots (q^n - q^{n-1})$
$|SL(E)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\mathbb{F}_q^*} = (q^n - p) \cdots (q^n - q^{n-1})$) ou I ?

Déf : On appelle p-Sylow de G d'ordre fini $n = p^\alpha \beta$, $p \nmid \beta$ tout sous-groupe de G d'ordre p^α

Ex crucial : $|GL(\mathbb{F}_p)| = (p^n - 1) \cdots (p^n - p^{n-1}) = p^{\frac{n(n-1)}{2}} m$ où $p \nmid m$

Soit $T_{sup}(\mathbb{F}_p) \cap GL(\mathbb{F}_p)$: c'est un sous groupe de $GL(\mathbb{F}_p)$ d'ordre $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$: c'est un p-Sylow

Th de Sylow : Soit G groupe fini d'ordre $n = p^\alpha m$, $p \nmid m$. Alors

1/ - il existe un p-Sylow de G
- les p-Sylow sont conjugués
- si $n_p = |\{p\text{-Sylow}\}|$, $n_p \equiv 1 [p]$ et $n_p \mid m$

Rq : Le 1/ se démontre via les injections ci-dessus et l'exemple !

2) Représentations

III Topologie de GL(E)

On munit $M_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|\cdot\|_2$: $\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$, où $A=(a_{ij})$

Alors $(M_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ est un espace métrique

De plus, $GL_n(\mathbb{K})$ est une partie de $M_n(\mathbb{K})$ et est donc munie de la topologie induite par celle de $M_n(\mathbb{K})$

De même, soit E un espace de Banach de dim finie donc $\|\cdot\|$; alors $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}(E)$ est un espace de Banach pour la norme $|||f||| = \sup_{\|x\| \le 1} \|f(x)\|$.

1) Densité et ouverture

Th : $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$

Prop : $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ et est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$

Rq : car $\det : M \mapsto \det(M)$ est continue !

Appli : Un raisonnement de densité permet de prouver que

- $\forall A,B \in M_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- il existe une base de $M_n(\mathbb{K})$ formée d'éléments de $GL_n(\mathbb{K})$

2) Connexité

On s'intéresse aux cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Prop : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe

Rq : Vient de ce que det est continue et γ peut éviter un point de $\mathbb{C}$

Ne marchant pas pour $GL_n(\mathbb{R})$, il va falloir décomposer $GL_n(\mathbb{R})$ pour réduire le problème.

Décomposition polaire de $GL_n(\mathbb{R})$: Soit $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ens des matrices symétriques définies positives. Alors $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$,
$\exists ! (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = OS$

De plus, $\left(\begin{array}{ccc} O_n \times S_n^{++} & \longrightarrow & GL_n \\ (O,S) & \longmapsto & OS \end{array}\right)$ est un homéomorphisme

Rq : dur !

Prop : $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes

Coro : $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

DEV Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

Soit E espace euclidien et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée

Soit $B = \{u \in \mathcal{L}(E) \,/\, |||u||| \le 1\}$ la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

Alors les points extrémaux de B sont les éléments de $O(E)$

3) Autres résultats et applications

Compacité

~~Exp~~.

Référence : PERRIN
TAUVEL
PEYRE
M-T