107

Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

I Généralités sur les représentations

1) Définitions

Déf : Soit G un groupe fini et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Une représentation linéaire de G dans V est la donnée d'un morphisme de groupes $\rho_V : G \to GL(V)$.
Ceci équivaut à la donnée d'une action (à gauche) linéaire de G sur V où $\forall (g,v) \in G\times V$, $g\cdot v = \rho_V(g)(v)$

Rq : (ρ_V, V) ou simplement ρ_V ou V est alors une représentation de G.

Déf : Le degré (dimension) de la représentation (ρ_V, V) est la dimension de V comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel

→ Dans toute la suite, toutes les représentations sont de degré fini

Déf : Soient (ρ_V, V) et (ρ_W, W) deux représentations de G. ρ_V et ρ_W sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme $\varphi : V \to W$ tel que $\forall g \in G$,
$\varphi \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ \varphi$ (φ est dit G-équivariante)

Rq : Permet d'avoir le diagramme commutatif en annexe 1
Not : on note $\mathcal{L}_G(V,W)$ l'ensemble des appli linéaires G-équivariantes

Déf : Si V, représentation de G tel que $F \subset V$ sev de V tel que $\forall g \in G$, F est stable par $\rho(g)$ (on dira que F est G-stable) alors (ρ_V, V) induit une représentation $(\rho_{V|F}, F)$ dite sous-représentation de V.

Déf : Une représentation V est irréductible si ses seules deux sous-représentations sont $\{0\}$ et elle-même.

2) Exemples (2)

1) Représentation triviale : Pour tout groupe fini G,
$\mathbb{1}\left(\begin{array}{l} G \to GL(V) \\ g \mapsto Id_V \end{array}\right)$ est une représentation, on la note $\rho_T = \mathbb{1}$

2) Représentation standard : Pour tout groupe G fini qu'on peut voir comme un sous-groupe de $GL(V)$, alors on obtient une représentation appelée représentation standard :

Ex : $S_4 \simeq Isom^+(\mathcal{C})$ (les isométries directes du cube)
Ainsi $\rho : \left(\begin{array}{l} S_4 \to GL_3(\mathbb{R}) \\ \sigma \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(R_\sigma) \end{array}\right)$ où R_σ la rotation associée à σ

3) Représentation régulière : Pour tout groupe fini G fini, si pour $g \in G$, $e_g\left(\begin{array}{l} G \to \mathbb{C} \\ h \mapsto \begin{array}{l} 0 \text{ si } h \neq g \\ 1 \text{ si } h = g \end{array}\end{array}\right)$ est une fonction telle que $(e_g)_{g\in G}$ définit une base du $\mathbb{C}$-ev des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ noté $\mathbb{C}^G$
En opérant G par translation à gauche, on obtient
$\rho_R \left(\begin{array}{l} G \to \mathbb{C}^G \\ g \mapsto \rho_R(g) \end{array}\right)$ où $\rho_R(g)(e_h) = e_{gh}$, $e_h \in \mathbb{C}^G$

Rq : Cette permutation est aussi appelée représentation de permutation puisque $\rho_R(g)$ échange les éléments de la base $(e_g)_{g\in G}$ de $\mathbb{C}^G$: $Mat_{(e_g)}(\rho_R(h))$ est alors une matrice de permutation

4) Représentation somme : Pour deux représentations (ρ_V, V) et (ρ_W, W) de G, on définit la représentation $(\rho_{V\oplus W}, V\oplus W)$ par $\rho_{V\oplus W}(g)(v,w) = \rho_V(g)(v) + \rho_W(g)(w)$ $\forall g \in G$, $\forall (v,w) \in V\oplus W$

5) Représentation des morphismes : Pour deux représentations (ρ_V, V) et (ρ_W, W) de G, on définit la représentation $(\rho_{\mathcal{L}(V,W)}, \mathcal{L}(V,W))$ par $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)(f) = \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$ $\forall g \in G$, $\forall f \in \mathcal{L}(V,W)$

Rq : 4) et 5) définissent bien des représentations !
Si f est G-équivariante, alors $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)(f) = f$

3) Résultats théoriques

Lemme de Schur : Soient (ρ, V) et (ρ, W) deux représentations de G irréductibles et $\varphi \in \mathcal{L}(V,W)$ équivariante par G ($\varphi \in \mathcal{L}_G(V,W)$)
Alors : 1/ • si ρ_V et ρ_W ne sont pas isomorphes alors $\mathcal{L}_G(V,W) = \{0\}$
2/ • si $V = W$ et si $\varphi \neq 0$ alors φ est un isomorphisme et $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ tq $\varphi = \lambda Id_V$

Rq : C algébriquement clos et crucial pour ⇐ !

Appli : Lorsque G est abélien, toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1.
Le centre de $GL_n(\mathbb{C})$ est formé des homothéties

Lemme de Maschke : Soit (ρ, V) une représentation de G et (ρ_F, F) une sous-représentation de V, $F \neq \{0\}$.
Alors il existe une sous-représentation H de G dans G telle que $V = F \oplus H$

Rq : Autrement dit, il existe un supplémentaire G-stable à F.

Rq : Il suffit de modifier la projection sur F // à H notée π pour la rendre G-stable : $\tilde{\pi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_V(g)\circ\pi\,\rho_V(g^{-1})$

Coro : Toute représentation se décompose de manière unique à isomorphisme près en somme directe de représentations irréductibles V_i : $V \simeq \bigoplus_{i=1} V_i^{\oplus a_i}$ où $W^{\oplus a_i} = W\oplus\cdots\oplus W$ (a_i fois)

II Généralités sur les caractères

1) Définitions et exemples

Def : Soit (ρ_V, V) une représentation d'un groupe fini G.
Le caractère de (ρ_V, V) est l'application $\chi_V \left(\begin{array}{l} G \to \mathbb{C} \\ g \mapsto \chi_V(g) \end{array}\right)$
telle que $\forall g\in G$, $\chi_V(g) = tr(\rho_V(g))$ où tr désigne la trace.

Prop : Pour (ρ_V, V), (ρ_W, W) représentations de G, le caractère χ_V vérifie :
- $V \simeq W \Rightarrow \chi_V = \chi_W$
- $\chi_V(1_G) = \dim(V)$
- $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ $\forall g\in G$
- $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$ $\forall (h,g)\in G^2$: on dit que χ_V est une fonction centrale sur G et on note $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble de ces fonctions
- $\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$ $\forall g\in G$
- $\chi_{\mathcal{L}(V,W)}(g) = \overline{\chi_V(g)}\cdot\chi_W(g)$ $\forall g\in G$

Ex : - $\chi_1(g) = 1$ $\forall g\in G$ (1 représentation triviale)
- $\chi_R(g) = |$ points fixes par la permutation induite par g $|$ (R représentation régulière)

Rq : C est algébriquement clos donc $\rho(g)$ admet des valeurs propres et $\chi(g)$ = trace de leurs sommes. Comme $\rho(g)^n = \rho(g^n) = Id$, ses valeurs propres sont des racines n-ièmes de l'unité.

Rq : Les fonctions centrales sont constantes sur les classes de conjugaison de G.

2) Résultats théoriques

Def : Pour φ et ψ deux fonctions de G dans $\mathbb{C}$ ($\varphi,\psi\in\mathbb{C}^G$), on définit $\langle\varphi,\psi\rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)}\psi(g)$
- C'est un produit hermitien sur $\mathbb{C}^G$

Th : Soit S un système de représentants des caractères de représentations irréductibles.
Alors $(\chi_i)_{i\in S}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{C}^G$
ie $\langle\chi_i,\chi_j\rangle = 0$ si $i\neq j$ et $\langle\chi_i,\chi_i\rangle = 1$
De plus, $(\chi_i)_{i\in S}$ est une base de l'espace des fonctions centrales de G dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}(G)$.

Coro : L'ensemble S est de cardinal égal au nombre de classes de conjugaison de G

Coro : Si $V \simeq \bigoplus_{i\in S} V_i^{\oplus a_i}$, alors $\langle\chi_V,\chi_V\rangle = \sum_{i\in S} a_i^2$

Appli 1 : $V\simeq W \Leftrightarrow \chi_V = \chi_W$
V est irréductible $\Leftrightarrow \langle\chi_V,\chi_V\rangle = 1$

Appli 2 : Pour la représentation régulière ρ_R de caractère χ_R
$\mathbb{C}^G \simeq \bigoplus_{i\in S} V_i^{\oplus a_i}$ où $a_i = \dim_{\mathbb{C}}(V_i) = \langle\chi_R,\chi_i\rangle$
En particulier, $|G| = \sum_{i\in S}\dim_{\mathbb{C}}(V_i)^2$

3) Table des caractères

Pour un groupe fini G donné, il y a donc autant de caractères de représentations irréductibles que de classes de conjugaison de G et celles-ci sont constantes sur ces classes. On peut alors dresser un tableau de taille carrée avec en ligne, les différents caractères et en colonne les différentes classes de conjugaison de G et leur intersection étant $\chi_i(g_j)$, $g_j\in G$, $i\in S$
C'est la table des caractères de G.

Rq : Il y a orthogonalité des colonnes de la table des caractères pour le $\langle , \rangle$ usuel : pour $g, h \in G$, alors $\sum_{i \in S} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} \frac{|G|}{|\mathcal{C}(g)|} & \text{si } g \text{ et } h \text{ sont dans les } \text{cl de conj} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où $\mathcal{C}(g) = $ cl(g).

Pour remplir la table, on peut toujours mettre la représentation triviale $\mathbb{1}$ dont la ligne est remplie de 1 et utiliser la relation $|G| = \sum_{i \in S} \chi_i(1_G)^2 = \sum_{i \in S} \dim_{\mathbb{C}}(V_i)^2$

Cette égalité permet de remplir une case s'il reste une seule ligne à remplir et l'orthogonalité des caractères permet de compléter la table.

Rq AA : Si G et G' ont même table de caractères, on a pas nécessairement $G \simeq G'$! (voir H_8 et D_4)

III Exemples et applications

1) Le cas où G est abélien

Def : On appelle dual de G, un groupe fini, l'ensemble des morphismes de groupes de $(G, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. On le note $\hat{G}$ et muni de la loi $\times$, c'est un groupe abélien.

Rq : Un élément du dual de G est un caractère d'une représentation de G.

Prop : Il y a équivalence entre :
- G est abélien
- Les représentations irréductibles de G sont de degré 1.
- Les représentations irréductibles (à iso près)

En particulier, il y a $|G|$ représentations irréductibles (à iso près)

Lemme : Soit G groupe fini abélien et $H < G$. Un élément de $\hat{H}$ peut être prolongé en un élément de $\hat{G}$

Coro : Il y a égalité $|\hat{G}| = |G|$. Ainsi le dual de G coïncide avec les caractères des représentations irréductibles de G.

Rq : On a en fait $G \simeq \hat{G}$ et on peut de même définir $\hat{\hat{G}}$

Prop : Pour $g, h \in G$, alors $\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(g)}\chi(h) = \begin{cases} 0 & g \neq h \\ 1 & g = h \end{cases}$

Avec ce dual, on va faire de la transformée de Fourier (analogie avec l'analyse)

Prop : $\hat{G}$ est une base de $\mathbb{C}^G$

Def : Soit $f \in \mathbb{C}^G$ et $\chi \in \hat{G}$. On définit le coefficient de Fourier $\varphi(\chi) = \langle f, \chi \rangle$ (où $\langle , \rangle$ est le produit hermitien de $\mathbb{C}^G$)

On peut alors définir l'application $c\left(\begin{array}{l} \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^{\hat{G}} \\ f \mapsto \varphi \end{array} \right)$

et l'application transformée de Fourier $\mathcal{F}\left(\begin{array}{l} \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^{\hat{G}} \\ f \mapsto \hat{f} \end{array} \right)$ où $\hat{f}(\chi) = \sum_{g \in G} f(g)\chi(g) = |G|\,\varphi(\overline{\chi})$

Rq : Comme dans le cas de l'analyse, on peut définir la convolution ou avoir une formule d'inversion.

2) La table des caractères de S_4

DEV 1 Table des caractères de S_4
On peut, via la représentation triviale, standard donnée en exemple et la représentation signature dresser la table des caractères de S_4 (cf annexe 2)

3) Le théorème de Molien

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{N}$. Soit $X_1, \dots, X_n$ n indéterminées. On note $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ l'algèbre des polynômes de $\mathbb{C}$ à n indéterminées et $\mathbb{C}_d[X_1, \dots, X_n]$ le sev des polynômes homogènes de degré d. Soit $G = GL_n(\mathbb{C})$, On définit la représentation ρ sur $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ de G par : si $A \in G$, $A^{-1} = (a_{ij})$, si $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ $\rho(A)(P)(X_1, \dots, X_n) = P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}X_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{jn}X_j\right)$

On admet que ρ est une sous représentation sur $\mathbb{C}_d[X_1, \dots, X_n]$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.

Soit $\Phi(X)$ la série de Molien $\Phi(X) = \sum_{d \geq 0} a_d X^d$ où $a_d = \dim \mathbb{C}_d[X_1, \dots, X_n]^G$)

DEV 2

1) Lemme de Reynolds : Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe fini G. On définit l'endomorphisme R_G de V : $R_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$.
- Alors $V^G = \mathrm{Im}(R_G)$ et $\dim(V^G) = \mathrm{Tr}(R_G)$

2) $\Phi(X) = \sum_{A \in G} \frac{1}{\det(I_n - XA)}$

i.e tq $\rho(g)(x+\lambda y)=\rho(g)(x)+\lambda\rho(g)(y)$

(2) Deux types d'exemples : les directs et les constructifs.

Annexe 1

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "\varphi"'] & W \end{tikzcd}$$

Annexe 2

S_4	~~Id~~ 1	(12)	(12)		

[RAU] Gérard RAUCH - Les groupes finis et leurs représentations

[PEY] Gabriel PEYRE - L'algèbre discrète de la transformée de Fourier