109

Représentations de groupes finis de petit cardinal

I Généralités sur les représentations et les caractères

1) Représentations et résultats théoriques

Déf : Soit G un groupe fini et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une représentation linéaire de G dans V est la donnée d'un morphisme de groupe $\rho_V : G \to GL(V)$ ie d'une action de G sur V telque $\forall g, v \in G \times V$, $g \cdot v = \rho_V(g)(v)$

Déf : Le degré de la représentation (ρ_V, V) est la dimension de V comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
$\rightarrow$ Toutes les représentations seront de degré fini.

Déf : Une sous-représentation de (ρ_V, V) est un sev F de V qui est G-stable (ie $\rho(g)$-stable $\forall g \in G$)
Une représentation est irréductible si ses seules deux sous-représentations sont $\{0\}$ et elle-même.

Lemme de Schur : Soient (ρ, V) et (ρ', V) deux représentations de G irréductibles et soit $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\varphi \neq 0$ équivariante par G (ie telque $\varphi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \varphi$ $\forall g \in G$)
Alors φ est un isomorphisme et $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ tq $\varphi = \lambda \, Id_V$

Lemme de Maschke : Soit (ρ, V) une représentation de G et $F \neq \{0\}$ une sous-représentation de V.
Alors il existe une sous-représentation H de V telle que $V = F \oplus H$

Th : Toute représentation V se décompose de manière unique à isomorphisme près en somme directe de représentations irréductibles V_i : $V \simeq \bigoplus V_i^{\oplus a_i}$ Rou

2) Caractères et tables de caractères

Déf : Le caractère d'une représentation (ρ, V) de G fini est l'application $\chi_V \left(\begin{array}{l} G \to \mathbb{C} \\ g \mapsto Tr(\rho_V(g)) \end{array} \right)$ Rou Rey

Rplt : Pour (ρ_V, V), (ρ_W, W) représentations de G : Pey
- $V \simeq W \Rightarrow \chi_V = \chi_W$
- $\chi_V(1_G) = \dim_{\mathbb{C}}(V)$
- χ_V est une fonction centrale sur G
- $\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$
- $\forall g \in G$, $\chi_V(g)$ est somme de racines de l'unité.

Déf : Soit $\mathcal{C}(\mathbb{C}^G) \subset \mathbb{C}^G$ l'ensemble des fonctions centrales.
On munit $\mathcal{C}(\mathbb{C}^G)$ du produit hermitien $\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g)$

Th : Soit S un système de représentants des représentations irréductibles de G
Alors $(\chi_i)_{i \in S}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{C}^G$ et une base de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{C}^G)$

Cor : L'ensemble S est fini et de cardinal égal au nombre de classes de conjugaisons de G Rou

Cor :
- $V \simeq W \Leftrightarrow \chi_V = \chi_W$
- V irréductible $\Leftrightarrow \langle \chi_V | \chi_V \rangle = 1$ Rey
- $|G| = \sum_{i \in S} \dim_{\mathbb{C}}(V_i)^2$ (1)

Déf : La table des caractères d'un groupe fini G est le tableau carré avec pour lignes les différents caractères irréductibles et en colonnes les classes de conjugaison de G, leur intersection étant $\chi_i(g)$.

Ppté : Il y a orthogonalité de la table des caractères pour le produit hermitien $\langle \mid \rangle$: $\forall (g,h) \in G^2$,

$$\sum_{i \in S} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} |G|/|C(g)| & \text{si } h \in C(g) \\ 0 \end{cases}$$

Rq !! : Deux groupes peuvent avoir même table de caractères sans être isomorphes !

3) Exemples de représentations pour G groupe fini

1) La représentation triviale : $(\mathbb{1}, V)$, $\forall V$ ev. Donnée par $\mathbb{1} \left(\begin{array}{l} G \to GL(V) \\ g \mapsto Id_V \end{array} \right)$ et $\chi_{\mathbb{1}} \equiv 1$

2) La représentation standard : elle est obtenue lorsque G est vu comme un sous-groupe de $GL(V)$.

3) La représentation régulière / de permutation : $(\rho_R, \mathbb{C}^G)$

Pour $g \in G$, on note $e_g \left(\begin{array}{l} G \to \mathbb{C} \\ h \mapsto \delta_g(h) \end{array} \right)$ où $\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & g=h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$(e_g)_{g \in G}$ définit une base de $\mathbb{C}^G$.
En opérant par translation à gauche on définit ρ_R par $\forall (g,h) \in G$, $\rho_R(g)(e_h) = e_{gh}$

Rq : $Mat_{(e_g)}(\rho_R(h))$ est alors une matrice de permutation.

Ppté : $\forall g \in G$, $\chi_R(g) = |\{\text{pts fixes par la permutation induite}\}|$

Représentations induites ?
Prolongement des caractères

II Représentations de groupes particuliers

1) Cas des groupes cycliques et abéliens

Prop : Il est équivalent de dire, pour tout groupe fini G :
- G est abélien
- les représentations irréductibles de G sont de degré 1

Rq : Il y a donc $|G|$ représentations irréductibles (cf. Nb prés.)

Ppté : Si (ρ, V) de degré 1, χ_V est un morphisme de G dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

• Soit G un groupe cyclique d'ordre n : $G = \langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
G est donc abélien et admet donc n représentations irréductibles de degré 1.

Prop : Soit U_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité. Pour tout $\xi \in U_n$, $\chi_\xi \left(\begin{array}{l} G \to \mathbb{C} \\ \alpha \mapsto \xi \end{array} \right)$ définit un morphisme de G dans $(\mathbb{C}^*, \times)$

Conséquence : Puisque $U_n = \{e^{\frac{2i\pi k}{n}} \mid k \in [0, n-1]\}$ et $\chi(\alpha^l) = \chi(\alpha)^l$ $\forall l \in [1, n]$, on peut dresser la table de G

	$\{1_G\}$	$\{\alpha\}$	$\{\alpha^2\}$		$\{\alpha^l\}$		$\{\alpha^{n-1}\}$
$\mathbb{1}$	1	1	1	..	1		1
V_1	1	$e^{\frac{2i\pi}{n}}$	$e^{\frac{4i\pi}{n}}$		$e^{\frac{2i\pi}{n}l}$		$e^{\frac{2i\pi}{n}(n-1)}$
V_j	1	$e^{j\frac{2i\pi}{n}}$			$e^{j\frac{2i\pi}{n}l}$		$e^{j\frac{2i\pi}{n}(n-1)}$
V_{n-1}	1	$e^{\frac{(n-1)2i\pi}{n}}$					

où V_j désigne une représentation de caractère $\chi_{e^{\frac{2i\pi}{n}}}$

Rq : On obtient une matrice de Vandermonde !

abéliens + diédral

Prop : Le groupe des isométries préservant les tétraèdres réguliers est isomorphe à A_4.
Le groupe des isométries directes préservant les cubes est isomorphe à S_4.

Rq : Fournit des représentations de A_4 et de S_4 qui sont en plus irréductibles.

On peut construire les tables de A_4 et de S_4

	Id	(12)(34)	(123)	(132)
Id	1	1	1	1
	1	1	j	j^2
	1	1	j^2	j
χ_I	3	-1	0	0

Table de A_4

Table de H_8

Références : RAUCH
PEYRE

Ao