Anneau des séries formelles
Applications

Soit K un corps (commutatif) de caractéristique 0

I L'anneau $K[[X]]$

1) La structure d'anneau de $K[[X]]$

Déf : Soient $A=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $B=(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de K. On définit les opérations suivantes :

- $A+B=(a_i+b_i)_{i\in\mathbb{N}}$
- $AB=(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k})_{i\in\mathbb{N}}$
- $\lambda A=(\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour $\lambda\in K$

Déf/Propo : On note $K[[X]]$ l'ensemble $K^{\mathbb{N}}$ muni de ces lois. $(K[[X]],+,\times,\cdot)$ est une K-algèbre commutative et intègre et donc en particulier un anneau. $(K[[X]],+,\times)$ est appelé anneau des séries formelles.

Rq : La structure de corps n'a pas servi, on peut définir $A[[X]]$ si A est un anneau.

Déf : Les éléments $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $K[[X]]$ se notent $\sum_{n\geq 0} a_n X^n = A$ et a_n $(n\in\mathbb{N})$ est appelé le coeff de degré n de A.

Note : Par abus de langage, $K[X]\subsetneq K[[X]]$

Déf : Soit $A\in K[[X]]$, $A\neq 0$

La valuation de A notée $v(A)$ est le plus petit degré pour lequel son coefficient correspondant est non nul : si pour $A=\sum a_n X^n$, $v(A)=\min_{n\geq 0}\{a_n\neq 0\}$

Par convention, la valuation de $A=0$ est $-\infty$.

Rq : Si $v(A)=k$, alors $\exists \tilde{A}\in K[[X]]$ tq $v(\tilde{A})=0$ et $A=X^k\tilde{A}$

Prop : Pour $(A,B)\in K[[X]]^2$, alors

- $v(AB)=v(A)+v(B)$
- $v(A+B)\geq \min(v(A),v(B))$

Propo : $K[[X]]$ muni de la valuation v est un anneau euclidien.

Rq : En fait, $A[[X]]$ euclidien $\iff$ A corps

Propo : Un élément de $K[[X]]$ est inversible si et ssi sa valuation est nulle.

Rq : Démo par récurrence sur les termes de A^{-1}

Ex : L'inverse de $1-X$ est $\sum_{n\geq 0} X^n$

Prop : Soit E l'ensemble des éléments de $K(X)$ qui n'ont pas 0 comme pôle qui est un sous anneau de $K(X)$. Alors $\varphi \left(\begin{array}{l} E \to K[[X]] \\ P/Q \mapsto PQ^{-1} \end{array}\right)$ est un morphisme d'anneaux injectif.

Rq : On pourra écrire $\frac{1}{1-X}$

Rq A# : $K(X)\not\subset K[[X]]$ (ex : $\frac{1}{X}\notin K[[X]]$)

2) Opérations sur l'anneau $K[[X]]$

Déf : Soit $D\left(\begin{array}{l} K[[X]] \to K[[X]] \\ \sum_{n\geq 0} a_n X^n \mapsto \sum_{n\geq 0} a_{n+1}(n+1) X^n \end{array}\right)$

D est une application linéaire de K-ev $K[[X]]$ appelée dérivation. Elle étend la notion connue pour $K[X]$

Propriétés : Pour $(P,Q)\in K[[X]]^2$ et $\lambda\in K$, alors :

- $(P+\lambda Q)'=P'+\lambda Q'$
- $(PQ)'=PQ'+P'Q$
- $P'=0$ si et ssi $P=\mu\in K$ (car K de car 0)
- Si P est inversible, $(\frac{1}{P})'=\frac{-P'}{P^2}$

Déf : Soit $A\in K[[X]]$: on peut définir une primitive à P à une constante près qu'on note $\int A$: si $A=\sum a_n X^n$ alors $\int A=\sum_{n\geq 1}\frac{a_{n-1}}{n}X^n+k$ où $k\in K$

Propriété : $(\int A)'=A$.

Rq : On peut résoudre des équa diff formelles.

Ex : L'unique solution de $A'=aA$ et $A(0)=1$ est la série $E_a=\sum_{n\geq 0}\frac{(aX)^n}{n!}$

Propriété : $E_{a+b}=E_aE_b$

Déf : Soient $(A,B) \in K[[X]]^2$ avec $v(B) \geq 1$ et $A = \sum a_n X^n$, $B = \sum b_n X^n$
On définit $B^k = \sum_{n \geq 1} b_{k,n} X^n$ où $b_{k,n} = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} a_{i_1} \cdots a_{i_k}$
On définit la composée $A \circ B$ dans $K[[X]]$ comme la série formelle $\sum_{n \geq 0} a_n B^n$

Ppté : $v(A \circ B) \geq v(A) v(B)$

Ex : $\frac{1}{1-A} = \sum A^n$ où $A \in K[[X]]$)

Déf/Propo : Soit $K((X))$, le corps des fractions de $K[[X]]$ appelé corps des séries formelles généralisées.
Alors $K((X))$ est l'ensemble des séries de Laurent
ie $\forall A \in K((X))$, A s'écrit de manière unique $A = \tilde{A} X^{-k}$ où $k \in \mathbb{N}$ et $\tilde{A} \in (K[[X]])^*$

Rq : Via le morphisme φ, $K(X)$ est un sous-corps de $K((X))$

II Applications

1) Séries génératrices

Déf

Ex

Dév 1 : Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne

2) Récurrences linéaires et dénombrement

3) La série formelle de Molien

Dév 2 : Th de Molien

...

Références : SAUX-PICARD
TAUVEL
FGN
PEYRE