Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

$\mathbb{K}$ est un corps choisi parmi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_q$ où $2 \nmid q$.
$\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à valeurs dans $\mathbb{K}$
$GL_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déf : Une action d'un groupe G sur un ensemble X est la donnée d'une loi : $\left(\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}\right)$ tel que $\forall (g,g') \in G^2, \forall x \in X, g \cdot (g' x) = (gg') \cdot x$ et $1_G \cdot x = x$

Déf : Pour $x \in X$, on appelle orbite de x et on note $O(x)$ l'ensemble $\{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$.

Prop : X est partitionné par les orbites via la relation d'équivalence : $x \sim y$ ssi $\exists g \in G$ tel que $g \cdot x = y$

I Actions par multiplication

1) L'action de Steinitz

Déf : Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$
L'action de Steinitz est l'action du groupe $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie pour $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ $(P,Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ par $(P,Q) \cdot M = PMQ^{-1}$

Déf : Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si elles appartiennent à la même orbite sous cette action
i.e $\exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ tel que $A = PBQ^{-1}$

Propté : Il est équivalent de dire pour $(A,B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})^2$:
- A et B sont équivalentes
- A et B représentent une même application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

Rq : P et Q sont alors les matrices de changements de bases

Rq : Le rang de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est la dimension de $\operatorname{Im} f$)
Le rang de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est le rang de l'application linéaire qu'elle représente.

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de rang r
- A est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Le nombre d'orbites pour cette action est de $1 + \min(n,p)$ et les matrices (J_r) forment un systèmes de représentants.

Rq : Le rang est l'invariant de cette action : il caractérise chaque orbite.

Appli : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ normé par $\|\cdot\|$.
Alors toute matrice de rang $r \leq p$ est limite de matrices de rang p.
En particulier, $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) L'action liée au pivot de Gauss

Rq : Multiplier à gauche, c'est opérer sur les lignes
On peut adapter ce qui suit lorsqu'on choisit d'opérer sur les colonnes.

Déf : Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$
On considère l'action par multiplication à gauche de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ ie l'action définie pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ par $P \cdot M = PM$

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ [404]. Alors il existe $r \in [\![1, \min(n,p)]\!]$ tel que A soit dans la même orbite que la matrice échelonnée réduite $\begin{pmatrix} 0 - 0 \; 1 & \\ & \ddots \\ 0 \text{———} & 0 \; 1 \end{pmatrix}$ r colonnes

L'entier r est le rang de la matrice.
Il y a donc $1 + \min(n,p)$ orbites pour cette action

Rq : Il suffit d'appliquer l'algorithme de Gauss.

Rq : Cas particulier de $p=1$: on agit alors sur les vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Prop : Deux vecteurs colonnes sont toujours dans la même orbite s'ils sont tous les deux non nuls.

Appl : La résolution d'un système linéaire à n équations et p inconnues s'effectue en cherchant la matrice échelonnée du système.

3) La décomposition de Bruhat

Def : Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle drapeau de $\mathbb{K}^n$ une suite croissante pour l'inclusion de $n+1$ sev $F_0 \subseteq \dots \subseteq F_n$ tel que $\dim(F_k) = k$ $\forall k \in [\![0,n]\!]$

On pose dans cette partie $G = GL_n(\mathbb{K})$
Soit H le sous-groupe de G formé des matrices triangulaires supérieures inversibles.

Lemme (Décomposition de Bruhat) : $G = \bigcup_{\sigma \in S_n} H P_\sigma H$
où P_σ désigne la matrice de permutation de σ.
ie $\forall A \in G$, $\exists (T,S) \in H$ et $\sigma \in S_n$ tq $A = T P_\sigma S$

DEV 1 — Action sur $G/H \times G/H$

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de $\mathbb{K}^n$
On définit l'action de G sur $\mathcal{D}$ pour $A \in G$ et $(F_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{D}$ par $A \cdot d = (A(F_k))_{k \in [\![1,n]\!]}$. Alors :
1/ — L'action est transitive et $\mathcal{D} \simeq G/H$
2/ — L'action $\left(\begin{array}{ccc} G \times (G/H \times G/H) & \to & G/H \times G/H \\ (A, (\bar{X}, \bar{Y})) & \mapsto & (\overline{AX}, \overline{AY}) \end{array} \right)$
est bien définie et admet $n!$ orbites.

II Action par conjugaison et congruences

1) L'action par similitude

Def : Soit $n \in \mathbb{N}$. L'action de similitude est l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $M_n(\mathbb{K})$ par conjugaison ie l'action telle que pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $M \in M_n(\mathbb{K})$, $P \cdot M = PMP^{-1}$

Def : Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables si elles appartiennent à la même orbite sous cette action ie $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PBP^{-1}$

Prop : Il est équivalent de dire pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$
— A et B sont semblables
— A et B représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans deux bases différentes.

Rq : Dans ce cas, P est la matrice de changement entre ces 2 bases

Rq : Le rang ne caractérise plus les orbites de cette action
Ex : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et I_2 ont même rang mais ne sont pas semblables

Prop (Réduction de Frobenius) : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$
Alors il existe une unique suite de polynômes $P_1, \dots, P_r$ unitaires et une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ tel que :
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_r) \end{pmatrix}$ où $C(P_i)$ est la matrice compagnon de P_i
- $P_1 | \dots | P_r$ avec $P_r = \Pi_f$ et $P_1 \dots P_r = \chi_f$

La suite $(P_1, \dots, P_r)$ est l'invariant de similitude de f

Rq : Peut se démontrer via la théorie des modules

Prop : Les invariants de cette action sont les invariants de similitudes de la réduction de Frobenius.

Rq : Diagonaliser et trigonaliser, c'est chercher un bon représentant !

2) L'action par conjugaison de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$

On munit $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) d'un produit scalaire (resp. hermitien) noté $<|>$

On définit $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^{-1} = {}^tM\} < GL_n(\mathbb{R})$

et $U_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid M^{-1} = {}^t\overline{M}\} < GL_n(\mathbb{C})$

On peut restreindre l'action précédente à ces deux sous-groupes.

Ppté : Il est équivalent de dire pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$:

- A et B sont dans la même orbite pour cette action
- A et B représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans deux bases orthonormées différentes
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ (resp $U_n(\mathbb{C})$) telque $A = PBP^{-1}$

Rq : P est la matrice de changement de bases orthonormées.

La réduction en base orthonormée d'une matrice revient à chercher un représentant de son orbite.

Propo : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ telque $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ soit dans l'orbite de S (sous cette action).

Rq : Si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, les λ_i sont alors strictement positifs.

Propo : Soit $O \in O_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(r,s,t) \in \mathbb{N}^3$ telque $r+s+2t = n$ et $(\theta_1, \dots, \theta_t) \in [0, 2\pi]^t$ telque
$\begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & -I_s & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_t} \end{pmatrix}$ soit dans l'orbite de O
où $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

Propo : Soit $U \in U_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ telque $\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$ soit dans l'orbite de U

DEV 2 — Composantes connexes de $S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ —

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, on note $\Lambda_k = \{S \in S_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{sign}(S) = (k, n-k)\}$

1/ Λ_k est ouvert

2/ Les composantes connexes de $S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ sont les $(\Lambda_k)_k$

3) L'action par congruence

Déf : Soit $n \in \mathbb{N}$. L'action par congruence de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $M_n(\mathbb{K})$ est l'action définie pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $M \in M_n(\mathbb{K})$ par $P.M = {}^tPMP$ (4)

Rq : t à gauche pour avoir l'action !

L'action reste bien définie sur les sous-ensembles $S_n(\mathbb{R})$ et $H_n(\mathbb{C})$: l'interet de se restreindre est de récupérer le lien avec les formes quadratiques !

De même, on peut restreindre $GL_n(\mathbb{K})$ à $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$ comme pour l'action par conjugaison. (5)

Déf : Deux matrices sont congrues si elles sont dans la même orbite sous une action par congruence.

Ppté : Il est équivalent de dire pour $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})$

- A et B sont congruentes
- A et B représentent une même application bilinéaire sur $\mathbb{K}^n$ dans deux bases différentes.

Rq : Enoncé analogue pour $H_n(\mathbb{C})$ et sesquilinéaires.

Rq : Deux matrices congrues sous l'action de $O_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes.

Propo : L'étude de l'action par congruence sous $GL_n(\mathbb{R})$ revient à classifier les formes quadratiques.

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, il y a $n+1$ orbites dont le rang est l'invariant et $(I_r)_{r \in [\![0,n]\!]}$ en système de représentant
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $rg(A) = r$, $\exists! p \in [\![0,r]\!]$ telque A soit congruente avec $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

L'invariant $(p, r-p)$ de l'orbite est appelé signature de A

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q$, il y a $2n+1$ orbites : $\forall A \in M_n(\mathbb{F}_q)$, $r = rg(A)$

A est congruente soit à $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$ soit à $\begin{pmatrix} I_{r-1} & & \\ & \delta & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

où δ n'est pas un carré de $\mathbb{F}_q$.

- Le $^{-1}$ est là pour avoir une action à gauche !
- Le rang est semi-continu inférieurement :
  ↳ le rang peut baisser continûment
- Interprétation en termes de bases ?
- Travailler sur $M_n(\mathbb{K})$ est pas vraiment intéressant
- On se ramène à $O_n(\mathbb{R})$ et non à $Gl_n(\mathbb{R})$
  via la réduction simultanée de <1> et de q :
  $\exists$ B orthonormée pour <1> et orthogonale pour q
  d'où $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $Mat_B(q)$ est diagonale.

Références

[Cog] COGNET Algèbre linéaire & algèbre bilinéaire

[C-G] CALDERO-GERMONI Histoires hédonistes de groupes et de géométries

[Gou] GOURDON Algèbre

[ObjA] Objectif Agrégation

[FGN1] Oraux X-ENS Algèbre 1

Rev 1 : FGN Algèbre 1

Rev 2 : ROUVIERE (pour le 1/)
+ FGN Algèbre 3 (pour le 2/)