Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications

Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tq $E \neq \{0\}$

I Généralités sur la dimension

1) Définition et théorèmes clefs

Déf : E est dit de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie

Ex : $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie mais pas $\mathbb{K}[X]$

Th d'existence : Soit G une famille génératrice de E de dimension finie. Soit L une famille libre tq $L \subset G$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $L \subset \mathcal{B} \subset G$

Cor : De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

Th : Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.

Déf : Ce nombre est appelé dimension de E sur $\mathbb{K}$. On le note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$.

Th de la base incomplète : Toute famille libre de E de dimension finie peut être complétée en une base de E.

Rq : Le cas de la dim ∞ nécessite l'axiome du choix.

Pté : Soit E $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

- Toute famille ayant au moins $n+1$ éléments est liée
- toute famille ayant au plus $n-1$ éléments n'est pas génératrice.
- Toute famille libre à n éléments est une base
- Toute famille génératrice à n élements est une base.

2) Sous-espaces vectoriels et dimension

Prop : Soient E ev de dimension n et F sev de E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$ avec égalité ssi $E = F$. (1)

Ptés : Soient $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ ev de dimension finies. Alors : (2)

1) • $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$ (formule de Grassmann)

2) • $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$

3) • $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E$ ssi $\begin{cases} E_1 + E_2 + \dots + E_p = E \\ \dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i) \end{cases}$

Rq : La somme directe et l'égalité 2) permet d'effectuer des récurrences sur la dimension.

Ex : La réduction des matrices orthogonales se démontre via ce procédé.

II Généralités sur le rang

1) Cas des applications linéaires

Déf : Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire. Le rang de f est défini comme la dimension de l'image de f qui est un sev de F. On le note $\mathrm{rg}(f)$.

Th du rang : Soient E et F deux ev avec E de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}$$

Rq : F peut être de dimension quelconque mais pas E.

Ex : $\left(\begin{array}{l} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P' \end{array}\right)$ vérifie bien les hypothèses

Coro : Soient E et F ev de dimension finie tq $\dim(E)=\dim(F)$. Pour toute application linéaire $f : E \to F$, il est équivalent de dire :
- f bijective
- f injective
- f surjective

Ex : $\left(\begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P' \end{array}\right)$ surjective non injective.
Le corollaire ne s'applique pas puisque $\dim(\mathbb{K}[X]) = \infty$.

Rq : Pratique lorsqu'on étudie un endomorphisme.

Appli : Soient $(a_i)_{1\le i\le n}$ et $(b_j)_{1\le j\le n}$ des éléments de $\mathbb{K}$ tel que $a_i \neq a_j$ si $i\neq j$.
Il existe un unique polynôme de degré $p-1$ tel que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $P(a_i)=b_i$.
Il est appelé polynôme interpolateur de Lagrange aux pts a_i.

2) Cas des matrices

Def : On appelle rang d'une famille de vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ de E de dimension finie la dimension du sev qu'il engendre : $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n))$

Def : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où n,p non nul et soit $A_1,\dots,A_n$ les n vecteurs colonnes de A. Le rang de A est défini comme le rang de la famille $(A_1,\dots,A_n)$ de $\mathbb{K}^p$ et on le note $\mathrm{rg}(A)$.

Propo : Soient E et F de dimension finies n et p et de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$.
Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$.

Propo : Deux matrices représentant la même application linéaire dans deux couples de bases distincts ont même rang.

Propo/Def : On considère l'action de Steinitz :
$$\left(\begin{array}{l} (GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ ((P, Q), M) \mapsto PMQ^{-1} \end{array}\right)$$

- Deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes.
- Deux matrices sont équivalentes si et ssi elles ont même rang. Ainsi si $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pour $1 \le r \le \min(n,p)$, la famille $(J_r)_{0\le r\le \min(n,p)}$ représente les orbites et il y a donc $1+\min(n,p)$ orbites.

Coro : Deux matrices semblables ont même rang mais la réciproque est fausse.

Propo : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$. Alors :
$\mathrm{rg}(A) = r$ si et ssi tous les mineurs de A de taille $> r$ sont nuls et s'il existe un mineur de taille $r \neq 0$.

Coro : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$
En particulier, le rang de A correspond au rang de la famille des vecteurs lignes de A.

Propo : $\mathrm{rg}\left(\begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{N} \\ A \mapsto \mathrm{rg}(A) \end{array}\right)$ est semi-continue inférieurement
i.e. le rang peut baisser continuement.

(5)

$\boxed{\text{DEV 1}}$ Théorème des extremas liés

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $g_1,\dots,g_r : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ ($r<n$).
Soit $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$.
Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $(d_a g_1, \dots, d_a g_r)$ forment une famille libre, alors $\exists!\, (\lambda_1,\dots,\lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ tq $d_a f = \lambda_1 d_a g_1 + \dots + \lambda_r d_a g_r$

Rq : $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Appli :

III Exemples et applications

1) Extensions de corps

Def : Soit E un corps. Une extension de corps de E est un corps F tel que $E \subset F$ et le degré de l'extension est la dimension de F comme E-ev qu'on note $[F:E]$.
Si le degré est fini, on parle d'extension finie.

Ex : $[\mathbb{C}:\mathbb{R}]=1$ mais $[\mathbb{K}(X):\mathbb{K}]=\infty$

Th : Soient deux extensions de corps finies $E \subset F$ et $F \subset G$.
Alors G est une extension finie de E et

$$\boxed{[G:E]=[G:F][F:E]}$$

Ex/Def : $\alpha \in \mathbb{C}$ est dit algébrique sur $\mathbb{Q}$ s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha)=0$. Dans ce cas, il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal qui annule α : c'est le polynôme minimal de α qu'on note π_α.
Et il vérifie $d°(\pi_\alpha)=[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ où $\mathbb{Q}(\alpha)$ désigne l'extension [illegible] du corps de rupture de π_α sur $\mathbb{Q}$.

Systèmes linéaires
Pivot de Gauss

Rq sur la démo :
$\exists$ base de $E \Rightarrow \exists$ générat. $F \Rightarrow F$ de dim $< \infty$
+ th de la base incomplète pour $\dim(F) \leq \dim(E)$

La dimension sert à caractériser certaines égalités

Poser $\varphi \left(\begin{array}{l} \mathbb{K}_p[X] \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ P \longmapsto (P(a_1), \dots, P(a_p)) \end{array} \right)$

φ injectif donc bijectif.

$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$
$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$
$\rightarrow$ cool !

Les choses sur le th (appli, interprétation)

Abusif en fait : il faut une inclusion en toute rigueur.

Références : GRIFONE
Objectif Agreg
CHAMBERT-LOIR
GOURDON
CALDERO-GERMONI