Déterminant. Exemples d'applications

I Généralités

Rq : Les résultats sont énoncés pour un corps $\mathbb{K}$ sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La division n'étant pas utilisée cela reste vrai pour un anneau A et un A-module.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Prop : L'ensemble des n-formes linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1.

Def : Soit B une base de E où $B = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.
On appelle déterminant de la base B la n-forme linéaire alternée sur E qui prend la valeur 1 sur la base B. On la note $\det_B$.
Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ avec $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j$ pour $i \in [\![1,n]\!]$
alors $\det_B (x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$

Th : Il est équivalent de dire pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:
- les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ forment une famille liée
- $\forall B$ base de E, $\det_B (x_1, \dots, x_n) = 0$
- $\exists B$ base de E, $\det_B (x_1, \dots, x_n) = 0$

Rq : Découle des propriétés des formes alternées !

Lemme : Soient B et C deux bases de E.
Alors $\det_C = \det_C (B) \det_B$

Def : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, le déterminant de f qu'on note $\det(f)$ est le scalaire $\det_B (f(e_1), \dots, f(e_n))$ pour toute base $B = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

Rq : Le lemme assure que le choix de la base n'importe pas.

Pté : Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$, alors :
- $\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = \det(f)\det(g)$
- $\det(f) \neq 0 \iff f \in GL(E)$ et alors $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$

Def : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A qu'on note $\det(A)$ le déterminant des vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ainsi, si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$$

Pté : Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :
- $\forall B$ base de E, $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_B(f))$
- $\det(A) = \det({}^tA)$
- $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$
- Si M et A semblable à B, alors $\det(A) = \det(B)$

Pté : Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, alors $\det \left(\begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ A \mapsto \det(A) \end{array} \right)$ est une application polynomiale en les a_{ij}, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
Ainsi, $\det$ est une application continue et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

II Calcul de déterminants

1) Propriétés calculatoires

Pté : Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ et des vecteurs colonnes $A_1, \dots, A_n$. Alors
1) • Si $A_i = A_j$ pour $i \neq j$, $\det(A) = 0$ (def forme alternée)
2) • $\forall \sigma \in S_n$, $\det(A_1, \dots, A_n) = \varepsilon(\sigma) \det(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)})$ — def forme antisymétrique
3) • $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
4) • $\forall \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\det(A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n, A_2, \dots, A_n) = \det(A)$
5) • $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A_1, A_2, \dots, A_n) = \lambda \det(A)$

Rq : 4) signifie que $\det(A)$ est invariant par ajout à une colonne d'une CL des autres colonnes.

Rq : Puisque $\det({}^tA) = \det(A)$, cela reste vrai en remplaçant colonnes par ligne.

Ppté : La formule du déterminant pour $n=2$ et $n=3$ permet le calcul du déterminant : le cas $n=3$ s'appelle la règle de Sarrus.

2) Les méthodes "fastidieuses"

Déf : Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ et soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ fixé.

- Le mineur (i,j) noté Δ_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de A
- le cofacteur (i,j) noté A_{ij} est le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$

Prop : Le déterminant de A peut se calculer par développement selon une colonne ou une ligne :

$\det(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (dvlp par à la j^e colonne)

$\det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (dvlp par à la i^e ligne)

Ppté : Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des termes diagonaux.

Le calcul de déterminant par blocs est possible dans certains cas : $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D\end{vmatrix}=|A|\cdot|D|$ si $A, 0, D$ ($M_n(K)$)

3) Les déterminants classiques

1) Déterminant de Vandermonde : soient $(a_1,\dots,a_n)\in K^n$

Le déterminant de Vandermonde de $a_1,\dots,a_n$ est celui de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & & a_n^{n-1}\end{pmatrix}$

On le note $V(a_1,\dots,a_n)$

Prop : $V(a_1,\dots,a_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$

2) Matrice de permutations :

Le déterminant de la matrice d'une permutation est égal à la signature de cette permutation.

III Applications

1) Résultant

Déf : Soient P, Q deux polynômes de $K[X]$ de degré p et de degré q. $P(X)=a_pX^p+\dots+a_0$ et $Q(X)=b_qX^q+\dots+b_0$ (3) dij K

Le résultant de P et de Q est le déterminant de la matrice de Sylvester donnée en annexe.

On le note $Res(P,Q)$ et $Res(P,Q)\in K$.

Ppté : $Res(P,Q)\neq 0$ si et ssi $P\wedge Q=1$

Ex : P a une racine double ssi $Res(P,P')=0$

DEV 1 — Théorème de Bézout faible (4)

1) Soient P, Q deux polynômes homogènes de $\mathbb{C}[Y_0,\dots,Y_n]$ de degré p et q, soit $A=\mathbb{C}[Y_1,\dots,Y_n]$

Alors $R=Res_{Y_0}(P,Q)$ le résultant en Y_0 de P et de Q est un polynôme homogène de A.

2) Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$ premiers entre eux et de degré p et q.

Alors $\begin{cases} P(x,y)=0 \\ Q(x,y)=0\end{cases}$ admet au plus pq max(p,q) solution dans $\mathbb{C}^2$.

2) En algèbre linéaire

Déf : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$: on appelle polynôme caractéristique de f le déterminant de la matrice à coefficients dans $K[X]$ $XI_n-Mat_B(f)$ où B base quelconque de E. On le note χ_f (5)

Ppté : $\lambda\in Sp(f)$ si et ssi λ est racine de χ_f

Th de Cayley-Hamilton : $\chi_f(Mat_B(f))=0$

Déf : La comatrice de A est la matrice notée $co(A)$ dont le coefficient (i,j) est le cofacteur $C(i,j)$: $[co(A)]_{ij} = A_{ij}$

Ppté : Pour toute matrice $A \in GL_n(K)$, l'inverse de A vérifie $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t co(A)}$

Rq : En fait, $\forall A \in M_n(K)$, ${}^t co(A)\, A = A\, {}^t co(A) = \det(A) I_n$.
A ne pas utiliser pour calculer A^{-1} ! Utiliser le pivot de Gauss qui reste moins coûteux.

Ppté : Soit $A \in M_n(K)$. Alors A est de rang $r \in \mathbb{N}$ ssi tous les mineurs de taille $> r$ sont nuls, et il existe un mineur de taille r non nul.

Déf : Soit le système linéaire $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ $X = (x_i)$
ie $AX = B$ où $A = (a_{ij})$, $B = (b_i)$
Le système est de Cramer ssi il admet une unique solution.

Ppté : Le système est de Cramer ssi $\det(A) \neq 0$.
Dans ce cas, la solution $(x_1, \dots, x_n)$ est donnée par
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \dfrac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$

Rq : Inutilisable en pratique (cf pivot de Gauss !)
donne de la régularité si un coefficient varie

3) En géométrie

Ppté : Avec les coordonnées barycentriques, le calcul d'un déterminant donne une CNS d'alignement de droites

Appli : Ce critère est appliqué pour démontrer le théorème de Ceva.

Exple/Déf : Soient B et C deux bases de E.
B et C ont même orientation si $\det(Pas_{B \to C}) > 0$
Ceci permet de définir une relation d'équivalence qui possède deux classes d'équivalences appelées classes de conjugaison.

Déf : E est orienté lorsqu'on choisit une de ces deux classes.
Les bases de cette classe sont les bases directes tandis que les autres bases sont dites indirectes.

Déf : Soient $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le parallélotope
$P(x_1, \dots, x_n) = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid w = \sum \lambda_i x_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1\ \forall i \}$
Son volume (ie la mesure de Lebesgue) est égal à $|\det(x_1, \dots, x_n)|$

Déf : Soit $(\mathbb{R}^n, \langle | \rangle)$ euclidien et soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
On appelle ellipsoïde (centrée) de A l'ensemble de $\mathbb{R}^n$
$E(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax | x \rangle \leq 1 \}$

DEV 2 — Ellipsoïde de John-Loewner

1) Soient $(A, B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tq $\alpha + \beta = 1$
Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$
avec inégalité stricte lorsque $A \neq B$ et $\alpha \in]0,1[$

2) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide ($0 \in \mathring{K}$?)
Alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K

4) En analyse

Prop : On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle.
Alors $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert non connexe de $M_n(\mathbb{R})$.

Ppté : Pour les systèmes différentiels linéaires, le wronskien défini en tout $t \in \mathbb{R}$ comme un déterminant donne une CNS pour qu'une famille de solutions forment une base de l'espace des solutions

Ppté : Le changement de variables fait apparaître un déterminant

Ppté : $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension n^2-1

) Avec la définition choisie, tout découle de la def → c'est la "bonne" def !

) On raisonne sur les matrices car plus pratiques à utiliser et permet le revenir à $f \in \mathcal{L}(E)$ où à B

) sous-jacent à la matrice, l'application

$$f \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{p-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{p+q-1}[X] \\ U \;,\; V & \longmapsto & UQ + PV \end{array} \right)$$

Dans les bases canoniques ordonnées par degré ↘, la matrice de Sylvester représente f.

) ~~Intersection de coniques planes~~ !
Rq sur la borne qui n'est pas optimal (rq)

) Bien def grâce à la remarque

5) Double interprétation en géométrie du determinant :
→ signe ⇝ orientation
→ valeur absolue
⇝ volume.

) Dans cette leçon.
ellipsoïde = ellipsoïde centré en 0

Si $(x,y) \xrightarrow{\langle 1 \rangle_A} \langle Ax|y \rangle$,
$\mathcal{C}(A)$ est la boule fermée de la norme $\|\cdot\|_A$ (8)

Ref

[Gou] GOURDON Algèbre
[Gri] GRIFONE
[ObjA] Objectif Agrégation