153

Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
$\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

I L'algèbre $\mathbb{K}[f]$

1) Définition et structure

Prop : $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n^2 < +\infty$ et une $\mathbb{K}$-algèbre.
Conséquence : La famille $(\mathrm{Id}, f, \dots, f^{n^2})$ est liée
donc il existe $(a_0, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ tel que $a_0 \mathrm{Id} + \dots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$.
Le polynôme $P(X) = a_0 + \dots + a_{n^2} X^{n^2}$ annule f.

Déf/Prop : Soit $\varphi \left(\begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(f) \end{array} \right)$ un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.

- Alors l'algèbre des polynômes en f est l'image de φ. On la note $\mathbb{K}[f]$.
- Le noyau de φ est appelé idéal des polynômes annulateurs de f et il n'est pas réduit à $\{0\}$.

Puisque $\mathbb{K}[X]$ est principal, il est engendré par un élément π_f unitaire qu'on appelle polynôme minimal de f.

Rq : On obtient l'isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[f] \simeq \mathbb{K}[X]/(\pi_f)$

Ppté : 1) Le $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}[f]$ est de dimension égale au degré de π_f.
2) $\mathbb{K}[f]$ est un corps ssi π_f est irréductible.

Rq : $(\mathrm{Id}, f, \dots, f^{d^\circ(\pi_f)-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$

Ppté : Si $g \in \mathbb{K}[f]$, alors g et f commutent et $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont f-stables.

2) Lemme des noyaux

Lemme des noyaux : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $P = P_1 \dots P_r$ où $P_i \wedge P_j = 1$

$\boxed{\text{Alors } \mathrm{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(f))}$

Cas particulier : si P annule f, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(f))$

Rq : Permet de ramener l'étude de $P(f)$ où P est irréductible.

3) Polynômes annulateurs

Prop : Soit P un polynôme annulateur de f. Alors les valeurs propres de f figurent parmi les racines de P.

Rq : L'égalité des ensembles n'est pas toujours vérifiée.

C-Ex : f un projecteur et $P(X) = (X^3 - X)$: -1 n'est pas une vp.

Prop/Déf : Soit λ une valeur propre (vp) de f : alors $\lambda \mathrm{Id} - f$ n'est pas injectif donc $\det(\lambda \mathrm{Id} - f) = 0$.
Les valeurs propres de f sont racines du polynôme $\chi_f(X) = \det(X\mathrm{Id} - f)$.
On l'appelle polynôme caractéristique de f.
Ses racines coïncident avec les valeurs propres de f.

Th de Cayley-Hamilton : $\chi_f(f) = 0$

II Applications à la réduction d'endomorphismes

1) Premiers exemples

Notation : $Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} / \lambda$ valeur propre de $f\}$
$E_\lambda = \ker(\lambda Id - f)$ est le sous-espace propre associé à λ
$E(\lambda) = \ker((\lambda Id - f)^{m_\lambda})$ où m_λ est la multiplicité de la vp λ
lorsque χ_f est scindé est le sous-espace caractéristique associé à λ

Diagonalisation

Propo : f diagonalisable $\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$

Th : f diagonalisable $\Leftrightarrow \pi_f$ scindé à racines simples
$\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur scindé à racines simples
$\Leftarrow \chi_f$ scindé à racines simples

Ex : Les projecteurs sont diagonalisables car $X^2 - X$ annule tout projecteur et est scindé à racines simples.

Trigonalisation

Th : f trigonalisable $\Leftrightarrow \pi_f$ scindé
$\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur scindé
$\Leftrightarrow \chi_f$ scindé

Appli : toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Ex : Les endomorphismes nilpotents sont trigonalisables car X^n annule un tel endomorphisme pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Réduction en sous-espace caractéristique

On suppose χ_f scindé : $\chi_f(X) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$

Propo : $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E(\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} \ker((\lambda Id - f)^{m_\lambda})$

2) Cyclicité

Déf : $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

Déf : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ où $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. La matrice compagnon de P est $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Propté : $\chi_{C_P}(X) = P(X)$ pour tout polynôme unitaire.

Propo : Il est équivalent de dire :
- f est cyclique
- $\dim(\mathbb{K}[f]) = n$
- π_f est de degré n et $\chi_f = \pi_f$
- $\exists$ une base de E dans laquelle $Mat_B(f)$ est une matrice compagnon

Les matrices compagnons sont les briques élémentaires de la réduction de Frobenius qui est hors programme. Citons le résultat sans en dire plus :

Propo : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\exists B$ base de E et $\exists P_1, \dots, P_r$ éléments de $\mathbb{K}[X]$ tq $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$ et $P_1 | P_2 | \dots | P_r$

3) Semi-simplicité

Déf : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit semi-simple si tout sev de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Une matrice est semi-simple si elle représente un endomorphisme semi-simple dans une certaine base.

DEV 1 — Endomorphismes semi-simples

f est semi-simple si et ssi π_f est produit de facteurs irréductibles distincts

Cor : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f diagonalisable $\Leftrightarrow f$ semi-simple.

Propo : $M \in M_n(\mathbb{R})$ est semi-simple si et ssi M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$
si et ssi M semi-simple de $\mathbb{C}$

Rq : La semi-simplicité se comporte bien par extension de corps.

Ex : Les endo. nilpotents $\neq 0$ ne sont pas semi-simples.

4) La décomposition de Dunford

Lemme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$ et de décomposition en facteurs irréductibles $P = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$.
Soit $N_i = \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(f))$ pour tout $i \in [1, r]$. Alors :

- $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$
- $\forall i \in [1, r]$, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j=1, j \neq i}^{r} N_j$ est un polynôme en f.

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que

- d est diagonalisable et n est nilpotente.
- $f = d + n$ avec $dn = nd$

De plus, d et n sont des polynômes en f.
Rq : d et n sont combinaisons linéaires des projecteurs du lemme.

5) L'exponentielle de matrices

Def : $M_n(\mathbb{K})$ est muni d'une norme matricielle subordonnée.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$: l'exponentielle de A est la somme de la série normalement convergente $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$
On la note $\exp(A)$.

Ppté : 1) $\exp \begin{pmatrix} M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}) \\ A \mapsto \exp(A) \end{pmatrix}$ est continue.

2) Si $AB = BA$, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$

3) Si $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ éléments de $\mathbb{K}$,
alors $\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \\ 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$ (où $P \in GL_n(\mathbb{K})$)

Prop : $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Prop : e^A diagonalisable $\Leftrightarrow$ A diagonalisable
Rq : Démonstration via la décomposition de Dunford.

Notation : $S_n(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-ev des matrices symétriques
$S_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques définies positives

DEV 2

$\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Découle de la théorie des anneaux principaux

Les polynômes annulateur jouent un grand rôles dans les reductions

$\chi_f = P_1 \dots P_r$ et $\pi_f = P_r$

<u>Références</u>

[Gou] GOURDON Algèbre

[Gri] GRIFONE

[objA] objectif Agregation

[Cog] COGNET <u>Algèbre linéaire</u>

DEV1 : GOURDON
objectif Agregation

DEV2 : P. CALDERO & J. GERMONI
<u>Histoire Hédonistes de Groupes et de Géométrie.</u>