154

Sous-espaces stables d'un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes en dimension finie. Applications

Soit $\mathbb{K}$ un corps
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$
Soit $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

I Généralités

1) Définition et premiers exemples

Déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sev de E.
F est f-stable (ou stable par f) si $f(F) \subseteq F$ ie $\forall x \in F,\ f(x) \in F$.

Ex : $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont f-stables.

Lemme : Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent.
Alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont g-stables.
Rq : Ne marche pas avec F f-stable quelconque !

Appli : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, f commute avec tout élément de $\mathbb{K}[f]$
Pour $\lambda \in Sp(f)$, le sous espace propre associé à λ
$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(f - \lambda Id)$ est f-stable ainsi que le sous espace caractéristique $E_{(\lambda)} = \mathrm{Ker}(f - \lambda Id)^{m_\lambda}$)
lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec $\pi_f(X) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ (le poly minimal)

Ex : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui laisse stable tout sev de E
Alors f est une homothétie.

2) Endomorphismes induits

Déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E f-stable.
L'endomorphisme induit de f est l'endomorphisme noté f_F de F égal à la restriction de f sur F.

Rq Att : $f_F \left(\begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}\right) \neq f_{|F} \left(\begin{array}{l} F \to E \\ x \mapsto f(x) \end{array}\right)$ obj

Lemme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sev f-stable et $\mathcal{B}$ une base de E dont les r premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ forment une base $\mathcal{B}_F$ de F
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f_F)$

Rq : Permet des raisonnements par récurrence sur la taille de la matrice.
Rq : Dans une base bien choisie, la stabilité de f se lit dans la matrice représentant f dans cette base
Réciproquement, une matrice triangulaire par blocs fournit un sev stable.

Ex : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
Avec $\mathcal{B}$ la base obtenue par concaténation d'une base $\mathcal{B}_K$ de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathcal{B}_I$ de $\mathrm{Im}(f)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$
où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_K}(f_K) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_I}(f_{\mathrm{Im}f}) = D$

Appli : $\chi_{f_F} \mid \chi_f$.

3) Lemme des noyaux

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de décomposition en facteurs premiers entre eux $P = P_1 \cdots P_r$ où $P_i \wedge P_j = 1$
Alors $\boxed{\mathrm{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(f))}$

Coro : En particulier, si P annule f, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(f))$ Go obj

Rq : tous les sev de la décomposition sont f-stables → pratique

Appli : Soit P un polynôme annulateur de f tq $P = P_1 \cdots P_r$ où $P_i \wedge P_j = 1$ ($i \neq j$) et F sev f-stable.
Alors P annule u_F et il vient
$F = \bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap \mathrm{Ker}(P_i(f)))$ (faux en général)

Ppté : Soient F, G deux sev de E f-stable pour $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $E = F \oplus G$.
Alors $\pi_f = \mathrm{ppcm}(\pi_{f_F}, \pi_{f_G})$ Gog

II Application à la réduction d'endomorphismes

Idée : La réduction de $f \in \mathcal{L}(E)$, c'est la recherche de sous sev f-stables !

1) Diagonalisation et trigonalisation

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il est équivalent de dire :
- f est diagonalisable
- $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$
- π_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$
- $E(\lambda) = E_\lambda$ $\forall \lambda \in Sp(f)$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Prop : Soit F sev f-stable. Alors
f diagonalisable $\Rightarrow f_F$ diagonalisable.
f trigonalisable $\Rightarrow f_F$ trigonalisable.

Def : Un drapeau de E est une suite croissante pour l'inclusion de $n+1$ sev de E $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_n = E$ tel que $\dim(V_k) = k$

Prop : $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable ssi il existe un drapeau de E $(V_k)_{k \in [[0,n]]}$ tq V_k est f-stable pour tout $k \in [[0,n]]$.

Prop : Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Il est équivalent de dire :
- f et g sont diagonalisables simultanément
- f et g commutent

Rq : Même énoncé avec trigonalisables.

Th de Burnside : Tout groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini

2) Réduction des endomorphismes normaux

Dans ce paragraphe, E est muni d'un produit scalaire pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et hermitien pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ noté $\langle \cdot \rangle$.

Lemme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E.
Alors, 1/ F f-stable $\Leftrightarrow F^\perp$ f^*-stable.
2/ Si f est normal ($f \circ f^* = f^* \circ f$) et $\lambda \in Sp(f)$, alors $E_\lambda^\perp$ est f-stable.

Rq : La stabilité se "conserve" par dualité

Th : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et f un endomorphisme normal.
Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale.

Rq : Les endomorphismes normaux sont diagonalisables dans $\mathbb{C}$

Th : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et f un endomorphisme normal.
Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ réels et $(a_1, b_1), \dots, (a_s, b_s)$ couples de réels tel que

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} a_s & -b_s \\ b_s & a_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Rq : Les endomorphismes normaux ne sont pas tous diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

Ex : Le th spectral assure que les endomorphismes auto-adjoints sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$;
Cependant, la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ de centre $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$ représente un endomorphisme normal mais n'est pas diagonalisable.

3) Autres réductions

Prop : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal $\pi_f(X) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ et $E(\lambda) = \mathrm{Ker}((f - \lambda Id)^{m_\lambda})$

Alors $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E(\lambda)$

Rq : Ceci mène à la décomposition de Dunford.

Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

Déf : Soit $P \in K[X]$ où $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

La matrice compagnon de P est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Propté : $\chi_{C_P}(X) = P(X)$ pour tout $P \in K[X]$ unitaire.

Prop : Il est équivalent de dire :
- f est cyclique
- $\exists B$ une base de E tq $Mat_B(f)$ est une matrice compagnon
- $\Pi_f = \chi_f$
- $\dim C(f) = n$

Rq : Les matrices compagnons sont les briques élémentaires de la réduction de Frobenius qui est hors-programme qui affirme que tout endomorphisme peut s'écrire comme produit par blocs de matrices compagnons.

Un élément $x \in E$ peut ainsi engendrer un sev f-stable.

III Endomorphismes définies avec la stabilité

1) Endomorphismes semi-simples

Déf. $f \in L(E)$ est semi-simple si tout sev de E f-stable admet un supplémentaire f-stable.

Une matrice est semi-simple si elle représente un endomorphisme semi-simple dans une certaine base.

DEV 1 — Endomorphismes semi-simples

f est semi-simple si et ssi Π_f est produit de facteurs irréductibles distincts

Co : Si $K = \mathbb{C}$, f diagonalisable $\Leftrightarrow$ f semi-simple

Prop : $M \in M_n(\mathbb{R})$ est semi-simple $\Leftrightarrow$ M est semi-simple dans $\mathbb{C}$
$\Leftrightarrow$ M diagonalisable dans $\mathbb{C}$

Rq : La notion se comporte bien par extension de corps

Ex : Les endomorphismes nilpotents ($\neq 0$) ne sont pas semi-simples dans $\mathbb{R}$.

2) Représentations linéaires d'un groupe

Durant tout ce paragraphe, $K = \mathbb{C}$

Déf : Soit G un groupe fini et V un espace vectoriel de dim finie.
Une représentation linéaire de G dans V est la donnée d'un morphisme ρ_V $\left(\begin{array}{l} G \to GL(V) \\ g \mapsto \rho_V(g) \end{array} \right)$

Déf : Soit (ρ_V, V) une représentation de G.
Une sous représentation (ρ_F, F) de V est la donnée d'un sev F de V tel que $\forall g \in G$, F est $\rho(g)$-stable (on dit que F est G-stable).

Lemme de Maschke : Soient (ρ_V, V) une représentation de G et (ρ_F, F) une sous-représentation de V tq $F \neq \{0\}$.
Alors il existe une sous-représentation (ρ_H, H) de V telle que $F \oplus H = V$.

Rq : Il y a un supplémentaire G-stable à F.

Déf : Une représentation est irréductible si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et elle-même.

Prop : Toute représentation se décompose de manière unique à isomorphisme près en somme directe de représentations irréductibles.

DEV 2 — Th de Molien

F f-stable et $|f-g|$ $\not\Rightarrow$ F g-stable.

cex $f = -Id$
g tq F non g-stable $\Rightarrow$ F f stable mais g-stable

Références : GOURDON
objectif Agreg
COGNET
PEYRE