155

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Soit $\mathbb{K}$ un corps avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$
Soit $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$

I Généralités

1) Définitions et propriétés

Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
λ est une valeur propre de f s'il existe $x \in E$, $x \neq 0$ tel que $f(x)=\lambda x$; x est alors dit vecteur propre de f associé à f.

Def : On appelle spectre de f l'ensemble des valeurs propres de f et on le note $Sp(f)$.

Def : Soit $\lambda \in Sp(f)$; on appelle sous-espace propre associé à λ le sev $E_\lambda(f) = \{x \in E / f(x) = \lambda x\} = \ker(f - \lambda Id)$.

Def : $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E de vecteurs propres de f.
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Rq : f diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\forall \mathcal{B}$ base de E, $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ diagonalisable.

Def : Soit $\varphi_f \left(\begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(f) \end{array} \right)$ un morphisme de $\mathbb{K}$ algèbre.
Le noyau de φ_f n'est pas réduit et la théorie des anneaux principaux assure que cet idéal est engendré par un élément π_f de $\mathbb{K}[X]$ qu'on appelle polynôme minimal de f.

Def : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; le polynôme caractéristique de A est le polynôme $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$

Rq : Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Def : On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme caractéristique de $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ pour $\mathcal{B}$ base quelconque.

Ppté : $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \chi_f(\lambda)=0$ et $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \pi_f(\lambda)=0$

Th de Cayley-Hamilton : $\chi_f(f)=0$.

Cor : $\pi_f \mid \chi_f$

2) Critères de diagonalisation

Propo : Si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples, alors f est diagonalisable.

Ppté : Soit m_λ la multiplicité de λ comme racine de χ_f.
Alors $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.

Th : Il est équivalent de dire
- f est diagonalisable (sur $\mathbb{K}$)
- $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$
- $\chi_f = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$ et $\dim(E_\lambda)=m_\lambda$
- π_f est scindé à racines simples (sur $\mathbb{K}$)

Propo : Soit F un sev f-stable.
Alors f diagonalisable $\Rightarrow$ f_F diagonalisable.

Def : Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$.
f et g sont codiagonalisables (diagonalisables simultanément) s'il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(g)$ soient diagonales.

Propo : Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Il est équivalent de dire :
- f et g sont codiagonalisables
- f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$)

Go

II Exemples d'endomorphismes diagonalisables

1) Endomorphismes auto-adjoints et normaux

On munit E d'un produit scalaire si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou d'un produit hermitien si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ qu'on note $\langle \mid \rangle$

Déf : $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si $f = f^*$

Th : Soit E un $\mathbb{K}$-ev euclidien ou hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint.
Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E de vecteurs propres de f. De plus, le spectre de f est constitué de réels.

Rq : Dans le cas euclidien, on retrouve le théorème spectral : si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels tq que ${}^tP A P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Déf : $f \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $f \circ f^* = f^* \circ f$

Lemme : Si F est un sev f-stable, alors $F^\perp$ est f^*-stable.
Si f est normal, $E_\lambda(f)^\perp$ est f-stable $\forall \lambda \in Sp(f)$.

Th : Soit $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tq f normal.
Alors $\exists \mathcal{B}$ une base orthonormée de E tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(f^*)$ soient diagonales

Rq : Faux pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$! de contre ex :
La rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ de $\mathbb{R}^2$ est un endomorphisme normal non diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Appli : Les endomorphismes unitaires ($\mathbb{C}$ de E hermitien tel que $f^* = f^{-1}$) sont diagonalisables dans $\mathbb{C}$.

2) Endomorphismes semi-simples

Rq : C'est la notion qui généralise être diagonalisable et qui se comporte bien par extension de corps.

Déf : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit semi-simple si tout sev de E f-stable admet un supplémentaire f-stable.
Une matrice est semi-simple si elle représente un endomorphisme semi-simple dans une certaine base.

Prop : f semi-simple de $\mathbb{K}$ si Π_f est produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ distincts

Cor : Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, f semi-simple $\Leftrightarrow$ f diagonalisable.

Prop : $M \in M_n(\mathbb{R})$ semi-simple $\Leftrightarrow$ M diagonalisable de $\mathbb{C}$
$\Leftrightarrow M$ semi-simple de $\mathbb{C}$

Ex : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est semi-simple dans $\mathbb{R}$, non diagonalisable dans $\mathbb{R}$

III Applications

1) La décomposition de Dunford

Th : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ où d est diagonalisable et n nilpotente tel que $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$. et exp.

2) Topologie et endomorphismes diagonalisables

3) Suites récurrentes d'ordre 2

4) Th de Maltsev

5) Th de Burnside

6) Exp est un homéomorphisme

Références : GOURDON
Objectif Agreg
GRIFONE