156

Exponentielle de matrices
Applications

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Soit $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ qu'on munit d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$.
$(M_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

I Définition et calcul de $\exp(A)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$

1) Définition et premières propriétés

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
La série $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ converge normalement sur tout compact de $M_n(\mathbb{K})$

Def : On appelle exponentielle de A noté $\exp(A)$ la somme de cette série
On définit l'exponentielle de matrices comme l'application $\exp : \left(\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!} \end{array} \right)$

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
Alors $\exp(A)$ est un polynôme en A

Rq Att : Le polynôme dépend de A ! Il n'existe pas $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = P(A)$

2) Propriétés permettant le calcul de $\exp(A)$

Soient A, B éléments de $M_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $a_1, \dots, a_n$ n éléments de $\mathbb{K}$

Prop : • Si A et B commutent, alors on a les égalités $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$ G-G MX

• $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$

• $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$

• $\exp(A)\exp(-A) = \exp(-A)\exp(A) = I_n$

càd $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ d'inverse $\exp(-A)$.

• $\exp\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_n} \end{pmatrix}$

• Les valeurs propres de $\exp(A)$ sont les exponentielles des valeurs propres de A.
En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

Rq : La donnée d'un polynôme annulateur de A permet de calculer $\exp(A)$ puisqu'on sait calculer successivement les puissances de A.

3) Décomposition de Dunford et calcul de $\exp(A)$

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. Gou
Alors il existe un unique couple $(D, N) \in M_n(\mathbb{K})^2$ tel que : – $DN = ND$ et $A = D + N$
– D est diagonalisable, N est nilpotente.
De plus, D et N sont des polynômes en A.

Appli au calcul de $\exp(A)$

On obtient $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$;
Or, $\exp(D)$ est aisée car D est semblable à une matrice diagonale
et $\exp(N)$ l'est aussi car $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $N^n = 0$
donc $\exp(N)$ est une somme finie de puissances de N.

Rq : Malheureusement, le calcul de D et de N peut être compliqué ! MX

Rq : La décomposition $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ est appelé décomposition de Dunford multiplicative. G-G

Coro : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
Alors $\exp(A)$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ A diagonalisable.

Coro : Soit N une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ nilpotente
Alors $\exp(N)$ est unipotente ie $\exp(N) - Id$ est nilpotente.

Rq : On peut ramener l'étude des endomorphismes nilpotents à ceux des unipotents via exp.

II Propriétés de l'exponentielle et applications

1) Regularité de exp et logarithme

Pplé : $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$
Conséquence : exp est une application continue

Propo : exp est une application C^∞ donc C^1 en particulier
Rq : Oui ! Aucune idée d'où ça sort !
Coro : exp est différentiable sur $M_n(\mathbb{K})$
avec $d_{O_n}\exp = Id_{M_n(\mathbb{K})}$ (différentielle en O_n de exp)

Rq cruciale : $Id_{M_n(\mathbb{K})}$ est inversible ! Le théorème d'inversion locale s'applique
Propo : L'exponentielle réalise un C^1 difféomorphisme de V_0 dans V_I où $V_0 \subset M_n(\mathbb{K})$ est un voisinage de 0 et $V_{I_n} \subset M_n(\mathbb{K})$ est un voisinage de $I_n = \exp(0)$

Propo : Soit $B(I_n, 1)$ la boule ouverte centrée en I_n de rayon 1 (c'est un voisinage de I_n !) pour la norme $\|\cdot\|$. Soit $M \in B(I_n, 1)$
La série $\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m}(M - Id)^m$ est normalement convergente

Df : On appelle logarithme de M la somme de la série précédente.

Propo : $\mathrm{Log}(M) = \exp^{-1}(M)$ pour $M \in B(I_n, 1)$

2) Injectivité, surjectivité de l'exponentielle

Les propriétés diffèrent selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Remarquons que $\exp(M_n(\mathbb{K})) \subset GL_n(\mathbb{K})$!

Propo : L'exponentielle n'est pas injective pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Rq : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ découle de $e^{2\pi i k} = 1$ $\forall k \in \mathbb{Z}$
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, découle de $\exp\begin{pmatrix} 0 & -2k\pi \\ 2k\pi & 0 \end{pmatrix} = I_2$ $\forall k \in \mathbb{Z}$
car $\begin{pmatrix} 0 & -2k\pi \\ 2k\pi & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & 2\pi i \end{pmatrix}$ (dans $M_2(\mathbb{C})$)

Propo : L'exponentielle de $M_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.
Rq : Via la décomposition de Dunford multiplicative.
Coro : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe (car image C^0 d'un connexe)

Propo : L'exponentielle de $M_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective
Ex : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas atteint par exp

Propo : Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Alors l'image de $M_n(\mathbb{R})$ par exp est l'ensemble des carrés des matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ ie $\{M^2 / M \in GL_n(\mathbb{R})\}$

DEV 1

Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques
Soit $S_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques > 0
Alors $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Rq : Enoncé analogue avec $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$

Décomposition polaire : Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$
Alors $\exists! \, (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $P = OS$

Coro : $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$
$GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$

3) Systèmes d'équations différentielles linéaires

) Equivalence des normes en dimension finie donc on prend n'importe laquelle, ne change pas la topologie.

) $\mathbb{K}[A]$ sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc fermé et de dimension finie d'où le résultat.

) Comme somme d'une série entière en A tq $\|A\| < +\infty$ = rayon de cv de exp de E.

) Mais qu'est $\exp^{-1}$?
Rq : voisinage sous-entend vsg ouvert

Références

[GOU] GOURDON Algèbre
[M-T] MNEIMNE TESTARD
[MX] Methodix Algèbre
[C-G] CALDERO-GERMONI
[ObjA] Objectif Agrégation
[Szp] Szpirglas L3 Algèbre