157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I Généralités

1) Endomorphismes trigonalisables

Déf : Un endomorphisme f de E est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure.
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Lemme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E tq $F \neq E$ qui est f-stable. Alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f_F induit par f (qu'on note χ_{f_F}) divise celui de f.

Prop : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, il est équivalent de dire :
- f est trigonalisable
- le polynôme caractéristique de f χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$
- f admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$

Coro : Les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables.

Rq : Faux sur $\mathbb{R}$!
C-Ex : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ mais est semblable à $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{C}$

Pté : Si deux endomorphismes trigonalisables commutent, il existe une base de trigonalisation commune à ces deux endomorphismes.

Coro : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Alors $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$
et $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ (DEV) 1

2) Endomorphismes nilpotents

Déf : Un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.
Le plus petit entier q vérifiant $f^q = 0$ est appelé indice de nilpotence.
Une matrice A est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tq $A^p = 0$

Pté : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, λf est aussi nilpotent.
Si $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ sont nilpotents tq $f \circ g = g \circ f$, alors $f+g$ est nilpotent.

Déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$: il existe un unique entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subsetneq \mathrm{Ker}(f) \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1})$.
Cet entier est appelé indice de f.

Rq : r correspond également au plus petit entier r tel que la suite décroissante pour l'inclusion $(\mathrm{Im}(f^m))_m$ stationne à partir de r : $\mathrm{Im}(f^r) = \mathrm{Im}(f^{r+1})$.

Pté : Si f est nilpotente, l'indice de f correspond à l'indice de nilpotence.
En particulier, l'indice de nilpotence est au plus égal à n.

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il est équivalent de dire
- f est nilpotente
- $\chi_f(X) = X^n$ (sur $\mathbb{K}$)
- le polynôme minimal de f π_f vérifie $\pi_f(X) = X^p$ où $p \in \mathbb{N}^*$ est alors l'indice de nilpotence de f.
- f est trigonalisable de seule valeur propre 0.

Ex : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

II Exemples et applications

1) La décomposition de Dunford

On se place sur $\mathbb{C}$ dans cette partie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de valeurs propres $(\lambda_i)_{1\le i\le r}$ de multiplicité m_i : on a donc $\chi(f) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$

Ppté : f est trigonalisable par blocs

Rq : On appelle sous-espace caractéristique associé à la vp λ_i de f le sev f-stable noté $E(\lambda_i)$:
$E(\lambda_i) := \mathrm{Ker}((f-\lambda_i \mathrm{Id})^{m_i})$
Ce sont les sev qui permettent d'écrire f sous forme triangulaire par blocs.

Prop - Décomposition de Dunford : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Il existe un unique couple $(d,n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tq
- d est diagonalisable et n est nilpotente
- $d \circ n = n \circ d$
- $f = d+n$

Rq : mieux, d et n sont des polynômes d'endomorphismes en f mais c'est plus dur.
- Un endomorphisme diagonalisable et nilpotent est l'endomorphisme nul.

Appli : Calcul de l'exponentielle de $f \in \mathcal{L}(E)$.
Il suffit de calculer l'exponentielle de d et de n (ce qui est simple) pour en déduire celle de f.

Appli : Endomorphismes unipotents.
Déf : Un endomorphisme g est unipotent si l'endomorphisme $g - \mathrm{Id}$ est nilpotent.
Ppté : L'exponentielle d'un endo. nilpotent est unipotent.
On obtient la décomposition de Dunford multiplicative pour $f \in GL(E)$, c'est produit de d et de u où $d \circ u = u \circ d$ et d diagonalisable, u unipotent.

(*)2

2) Drapeaux de E et action

Déf : On appelle drapeau de E toute suite $(V_k)_{0\le k\le n}$ de $n+1$ sev de E tel que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ $V_k \subsetneq V_{k+1}$ et $\dim(V_k) = k$ et $V_n = E$.

Ppté : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il est équivalent de dire
- f est trigonalisable
- il existe un drapeau $(V_k)_{0\le k\le n}$ tel que $\forall k \in [\![0,n]\!]$ V_k est f-stable.

~~Dans cette partie, K = R ou C~~

Soit $G = GL_n(\mathbb{K})$
H le sous-groupe de G des matrices triangulaires supérieures inversibles.
$\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de $\mathbb{K}^n$.

Lemme - Décomposition de Bruhat : Soit $A \in G$.
Alors il existe $(T,S) \in H^2$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que si P_σ désigne la matrice de permutation de σ alors $A = T P_\sigma S$

DEV 1 — Action sur les drapeaux de $\mathbb{K}^n$
1) Soit l'action de G sur $\mathcal{D}$ définie, pour $A \in G$, $(V_k)_{k\le n} \in \mathcal{D}$ par $A \cdot (V_k) = (A(V_k))_{k\le n}$
Cette action est transitive et $G/H \simeq \mathcal{D}$
2) Soit l'action de G sur $G/H \times G/H$ définie, pour $A \in G$ et $(\bar{X},\bar{Y}) \in (G/H)^2$, par $A \cdot (\bar{X},\bar{Y}) = (\overline{AX}, \overline{AY})$
Cette action est bien définie et possède $n!$ orbites.

3) Applications aux groupes finis

$\boxed{\text{DEV 2}}$ — Théorème de Burnside (*)$_3$

1) Lemme : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $Tr(A^k) = 0$. Alors A est nilpotente.
2) Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini

Rq : Énoncé faux pour $GL_n(K)$ où K de caractéristique non nulle !

Déf : Soit G un groupe fini d'ordre $p^\alpha q$ où $p \nmid q$. ($p \in \mathcal{P}$)
Un p-sous-groupe de Sylow (ou p-Sylow) de G est un sous-groupe de G d'ordre p^α.

Ex clé : $G = GL_n(\mathbb{F}_p)$, $p \in \mathcal{P}$
On sait que $|G| = (p^n - 1)\cdots(p^n - p^{n-1}) = p^{\frac{n(n-1)}{2}} m$ où $p \nmid m$
Alors le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de diagonale nulle est un p-Sylow de G.

Lemme : Soit G un groupe fini d'ordre $p^\alpha q$ où $p \nmid q$ et soit H un sous-groupe de G et soit S un p-Sylow de G.
Alors $\exists a \in G$ tq $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H

Th : G admet un p-Sylow si $p \mid |G|$.

Commentaires d'après-oral :

(*)$_1$ Rappeler les énoncés concernant la diagonalisation (pour le DEV2 + pour comparer)

(*)$_2$ Possible de mettre plus d'applications de Dunford

(*)$_3$ Rappeler la définition de l'exposant

Rq : C-Ex du th de Burnside :
$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$