Matrices symétriques réelles
Matrices hermitiennes

I Généralités

1) Matrices symétriques et hermitiennes

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) pour $n \in \mathbb{N}$.
A est dit symétrique (resp. hermitienne) si ${}^tA = A$
(resp. $A^* = A$ où $A^* = {}^t\bar{A}$)
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$
et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes

Ppté : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sont des $\mathbb{R}$-ev de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et n^2.

Prop : On a la somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
grâce à l'écriture $A = \frac{{}^tA + A}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Déf : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$). On dit que
- A est positive si $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tXAX \geq 0$
(resp. $\forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $X^*AX \geq 0$)
- A est définie positive si A est positive et vérifie ${}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$ pour $X \in \mathbb{R}^n$ (resp. $X \in \mathbb{C}^n$)

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$, $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$, l'ens des matrices sym / herm positives / définies positives.

Ppté : Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cup \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$
Alors les valeurs propres de A sont des réels positifs
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$
Alors les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs

2) Lien avec les formes quadratiques

Déf : Soit une application $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$)
ϕ est une forme bilinéaire symétrique (resp. forme sesquilinéaire hermitienne) si $\forall (X, Y, Z) \in (\mathbb{R}^n)^3$ (resp. $(\mathbb{C}^n)^3$) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)
ϕ vérifie :
- $\phi(X + \lambda Y, Z) = \lambda \phi(X, Z) + \phi(Y, Z)$
(resp. $\phi(X + \lambda Y, Z) = \bar{\lambda} \phi(X, Z) + \phi(Y, Z)$)
- $\phi(X, Y) = \phi(Y, X)$ (resp. $\phi(X, Y) = \overline{\phi(Y, X)}$)

Prop : Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique (resp. forme sesquilinéaire hermitienne) et B une base de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
Alors $\exists M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$) tel que M représente ϕ dans la base B.

Rq : Il y a donc un isomorphisme entre les formes bili sym et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et entre les formes sesqui herm et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

Déf : On appelle forme quadratique (resp. hermitienne) toute application q de la forme $q\left(\begin{array}{l}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \phi(x, x)\end{array}\right)$
(resp. $q\left(\begin{array}{l}\mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \phi(x, x)\end{array}\right)$) où ϕ est une forme bilinéaire symétrique (resp. sesquilinéaire hermitienne)

Prop : Soit q une forme quadratique réelle.
Alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique ϕ tel que $q(x) = \phi(x, x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.
On l'appelle la forme polaire et elle vérifie
$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ $\quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$

Rq : Il y a donc un isomorphisme entre les formes quadratiques réelles et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Rq : Il y a un énoncé analogue pour les formes hermitiennes ~~complexes~~.

3) Autres définitions

Useless

Def : On appelle produit scalaire (resp. produit scalaire hermitien) la forme polaire d'une forme quadratique (resp. hermitienne) définie positive.

On le note $< | >$.

Un espace vectoriel (de dim finie) muni d'un produit scalaire (resp. hermitien) est un espace euclidien (resp. hermitien)

Def : Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et $f \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u admet un adjoint f^* si $\forall (x,y) \in E^2$, $<f(x)|y> = <x|f^*(y)>$

Def : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $f^* \circ f = f \circ f^*$

Ppté : Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ (resp. $= {}^*\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$)

Ex : Les endomorphismes représentés par des matrices symétriques ou hermitiennes sont normaux.

II Réductions des matrices symétriques et hermitiennes. Applications

1) Enoncés

Th - Th. spectral : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Alors $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels ≥ 0 tel que
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_n \end{pmatrix} = {}^tPAP$$

Rq : $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales.

Rq : Autrement dit, toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

Coro : Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, le théorème reste valable avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels strictement positifs.

Th : Soit $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$

Alors $\exists P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels ≥ 0 tel que
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = {}^tPAP$$

Rq : $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices unitaires.

Coro : Le résultat reste valable pour $A \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels > 0.

Rq : Ces théorèmes de réductions sont des cas particuliers de la réduction des endomorphismes normaux.

Coro - Th de pseudo réduction simultanée

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ resp. $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.
Alors $\exists C \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) et $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels tel que : ${}^tCBC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ et ${}^tCAC = I_n$

resp. ${}^*CBC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ et ${}^*CAC = I_n$)

2) Applications aux formes quadratiques

Th : Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
Alors $\exists$ une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que si $x = \sum x_i e_i$, alors $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$ où $a_i \in \mathbb{K}$ et $r = rg(q)$.

Rq : Il existe une base orthogonale pour q.

Th de classification : Soit q une forme quadratique de rang r sur $\mathbb{K}$.

- si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\exists \mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$ tel que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\exists p \in \mathbb{N}$, $p \leq r$ un entier dépendant uniquement de q et $\exists B$ tel que $\mathrm{Mat}(q) = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_{r-p} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Le couple $(p, r-p)$ est appelé signature de q.

Déf : On appelle ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ tout ensemble du type $\{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 1\}$ où q est une forme quadratique définie positive.

DEV 1 — Ellipsoïde de John-Loewner

1) Soient A, B deux éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et α, β deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta = 1$.
Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det(A))^{\alpha} (\det(B))^{\beta}$

2) Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.
Alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K.

3) Topologie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$

Ppté : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $\|\cdot\|_2$ la norme 2 de $\mathbb{K}^n$.
Alors en notant $|||\cdot|||_2$ la norme matricielle associée à $\|\cdot\|_2$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), |||\cdot|||_2)$ est un espace vectoriel normé. De plus, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), |||\cdot|||_2)$ est un espace de Banach

Ppté : $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^t\bar{A}A)}$ le rayon spectral de A
où $\rho(M) = \max_{\lambda \in Sp(M)} \{|\lambda|\}$.

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
On appelle exponentielle de A la somme de la série normalement convergente $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ qu'on note $\exp(A)$

Ppté : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :
• $\exp(A)$ est un polynôme en A
• $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$

Ppté : • $e^{(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$
• $\exp\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & \exp(M) \end{array}\right)$ est continue.

DEV 2
$\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme

Rq : Cela est aussi vrai pour $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Lemme : Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Alors $\exists! N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $N^2 = M$

Propo - Décomposition polaire : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$
M s'écrit de manière unique sous la forme $M = OS$ où $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Coro : La décomposition polaire induit un homéomorphisme de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Rq : Résultat analogue pour $GL_n(\mathbb{C})$ avec $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.

Lemme de Morse
Matrices hermitiennes

) E, $\mathbb{K}$-ev de dim n $\rightarrow$ $E \simeq \mathbb{K}^n$
Donc se généralise

) Les ellipsoïdes sont ici supposés centrés en O.

References

[Gou] GOURDON Algèbre
[Gri] GRIFONE
[M-T] MNEIMNE TESTARD
[