159

Formes linéaires et hyperplan en dimension finie. Exemples et applications

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$

I Généralités

1) Définitions et propriétés

Déf : On appelle forme linéaire sur E une application linéaire φ de E dans $\mathbb{K}$.
On note E^* l'ensemble des formes linéaires de E qu'on appelle espace dual de E.

Déf : On appelle hyperplan de E tout sev de dimension $n-1$

Propo : Le noyau de toute forme linéaire non nulle est un hyperplan de E et tout hyperplan de E est noyau d'une forme linéaire non nulle.

Propo : Soit B une base de E, $B=(e_i)_{i\in[1,n]}$ et $\varphi\in E^*$
Alors φ est caractérisé par $(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))\in\mathbb{K}^n$
- Les formes linéaires sont les applications du type $\varphi : (x_1,\dots,x_n)_B \in E \mapsto a_1x_1+\dots+a_nx_n \in \mathbb{K}$ où $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$.
- Un hyperplan est l'ensemble des $x\in E$ vérifiant $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$ pour $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$

Rq : Travailler sur l'espace dual, c'est travailler sur des équations linéaires.

Propo : E^* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n (donc $E\simeq E^*$)
Rq : $E\simeq E^*$ n'est pas canonique car dépend du choix d'une base

2) Base duale

Déf/Propo : Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Soit $i\in[1,n]$
On considère e_i^* la forme linéaire définie par
$e_i^*(e_k)=\delta_{ik}=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}$
Alors $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de B.

Propo : Sous ces conditions, toute forme linéaire φ s'écrit $\varphi=\sum_{k=1}^{n}\varphi(e_k)e_k^*$

Déf : On définit le bidual de E noté E^{**} comme le dual de E^*

Propo : $E\simeq E^{**}$ de manière canonique

Déf/Propo : Réciproquement, soit $(f_1,\dots,f_n)$ une base de B
Alors $\exists! B=(e_1,\dots,e_n)$ base de E tel que $(f_1,\dots,f_n)$ soit la base duale de B.
B est dite base antéduale de $(f_1,\dots,f_n)$.

3) Orthogonalité

Déf : Deux éléments $x\in E$ et $\varphi\in E^*$ sont orthogonaux si $\varphi(x)=0$
Si $A\subset E$, $A^\perp:=\{\varphi\in E^* \mid \forall x\in A, \varphi(x)=0\}$ est l'orthogonal de A. C'est un sev de E^*
Si $B\subset E^*$, $B^\circ:=\{x\in E \mid \forall\varphi\in B, \varphi(x)=0\}$ est l'orthogonal de B. C'est un sev de E.
Rq : Fondé sur $\varphi(x)=\langle\varphi\,|\,x\rangle$

Thm : Soient A et B sev de E et E^* respectivement.
$\dim(A)+\dim(A^\perp)=n$ et $(A^\perp)^\circ=A$ et
$\dim(B)+\dim(B^\circ)=n$ et $(B^\circ)^\perp=B$
Rq : Car on est en dimension finie !

II Exemples et applications

1) Intersections de sev

Idée : Caractériser un sev de E par un sev de E° !

Prop : Soient p formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ tel que $rg(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$.
Alors le sev $F = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1,p]\!], \varphi_i(x) = 0\}$ est de dimension $n - r$

Rq : c'est la traduction de $\dim(B^\circ) = n - \dim(B)$!

Prop : Soit F un sev de dimension q
Alors il existe $n-q$ formes linéaires indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ telles que $F = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, n-q]\!], \varphi_i(x) = 0\}$

Rq : c'est la traduction de $\dim(A^\circ) = n - \dim(A^\perp)$

Idée : Tout sev est intersection d'hyperplans donc solution d'un système d'équation linéaires et inversement !

Appli aux polynômes interpolateurs de Lagrange.

2) Géométrie

$\langle \ \rangle = G(E)$ et $S(E)$

Hahn-Banach ?

3) En géométrie différentielle

Ppté : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$. Alors la différentielle de f en a est une forme linéaire.

Déf : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. La dérivée partielle de f par rapport à x_i en a notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est le réel défini par $df_a(e_i)$.

Rq : Il caractérise df_a comme annoncé (prop I.1)-3)

Déf : La base duale de $(e_1, \dots, e_n)$ est notée en calcul différentiel $(dx_1, \dots, dx_n)$.

Ainsi, $df_a = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i$

Déf : On appelle gradient de f en a noté $\nabla f(a)$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$

Déf : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, $d \in [\![1, n]\!]$.
V est une sous-variété de dimension d si pour tout $a \in V$, il existe U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et $n-d$ fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $x \in V \cap U$ ssi $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ et $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ $\forall i \in [\![1, n-d]\!]$.
L'espace vectoriel tangent en a à V est alors l'intersection des $\ker(df_i(a))$ pour $i \in [\![1, n-d]\!]$.

Rq : L'espace vectoriel tangent est une intersection d'hyperplans.
Dualité entre la déf de la sous-variété et son plan tangent.
Dans le cas d'une hypersurface, le plan tangent est un hyperplan.

4) Dans les espaces hilbertiens

Soit H un espace hilbertien.
Déf : Le dual topologique H' est l'ensemble des formes ~~linéaires~~ de
NON DIMENSION FINIE

Références : GRIFONE
GOURDON
ROUVIÈRE