Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ muni d'un produit scalaire $<\,|\,>$.
$(E, <\,|\,>)$ est un espace euclidien.

I Généralités

1) Notions générales

Def : Soit $A \subset E$; l'orthogonal de A est le sous-espace vectoriel $A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ <x|a> = 0\}$

Pptés : Pour tout sev F de E, on a
- $E = F \oplus F^\perp$ (et en particulier, $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$)
- $F^{\perp\perp} = F$

Propo : Dans E, il existe des bases orthonormées.

Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (ensemble des endomorphismes de E)
On appelle adjoint de f l'endomorphisme f^* vérifiant :
$$<f(x)|y> = <x|f^*(y)> \quad \forall (x,y) \in E^2$$

Propo : L'adjoint existe et est unique.

Ppté : Si B est une base orthonormée de E, alors
$Mat_B(f^*) = {}^t Mat_B(f)$

Ptés : Pour tout $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$, on a
$(f+g)^* = f^* + g^*$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, $f^{**} = f$, $\det(f^*) = \det(f)$,
$rg(f^*) = rg(f)$.

2) Endomorphismes remarquables

(*)
Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; f est un endomorphisme normal si $ff^* = f^*f$ (f et f^* commutent).

Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; f est une isométrie (ou endomorphisme orthogonale) si : $\forall (x,y) \in E^2$, $<f(x)|f(y)> = <x|y>$ ie $f^{-1} = f^*$
On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Propo : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, il est équivalent de dire :
- $f \in O(E)$ (ie $\forall (x,y) \in E^2$, $<f(x)|f(y)> = <x|y>$)
- $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$ (où $\|x\| = \sqrt{<x|x>}$)
- L'image de toute base orthonormale (BON) par f est une base orthonormale.
- Pour B BON de E, si $M = Mat_B(f)$, $M{}^tM = {}^tMM = I_n$
- Il existe une BON de E dont l'image par f est une BON

Ppté : Si $f \in O(E)$, alors $\det(f) = \pm 1$ et en particulier, f est bijective.

Ppté : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ (pour la loi $\circ$) appelé groupe orthogonal de E.

Rq : $SO(E) = \{f \in O(E) \mid \det(f) = 1\}$ est un sous-groupe de $O(E)$ appelé groupe spécial orthogonal de E.

Rq : Si $E = \mathbb{R}^n$, $O(E) \simeq O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = A{}^tA = I_n\}$

Rq : Une isométrie est un endomorphisme normal.

Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; f est un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) si $f = f^*$ ie $\forall (x,y) \in E^2$, $<f(x)|y> = <x|f(y)>$

Propo : Soit B une BON de E. Si f est autoadjoint, alors $M = Mat_B(f)$ vérifie $M = {}^tM$: M est symétrique.
On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

Propo : $S_n(\mathbb{R})$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ tel que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp A_n(\mathbb{R})$ ($A_n(\mathbb{R})$ ens. des matrices anti-symétriques)

Rq : Un endomorphisme autoadjoint est normal

II Réduction des endomorphismes remarquables

1) Réduction des endomorphismes normaux

Lemme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme normal. Alors :
$\forall F$ sev f-stable, alors $F^\perp$ sev f-stable
Donc E_λ sev propre associé à la vp λ, $E_\lambda^\perp$ est f-stable.

~~**Prop** : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, il est équivalent de dire :~~
~~- f est un endomorphisme normal~~
~~- f est diagonalisable dans une BON de E~~
~~- f et f^* sont codiagonalisables dans une BON de E~~

Th : Soit f un endomorphisme normal de E (euclidien)
Alors il existe une base orthonormée B de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ réels et $(a_1, b_1), \dots, (a_s, b_s)$ s couples de réels tel que :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \begin{pmatrix} a_s & -b_s \\ b_s & a_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

2) Réduction des isométries

Th : Soit f une isométrie de E (euclidien)
Alors il existe une base orthonormée B de E et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ où $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ pour tout i et $\theta_1, \dots, \theta_s$ s réels tel que $\theta_j \not\equiv 0 \,[\pi]$ pour tout j tel que :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon_r & & \\ & & & R(\theta_1) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix} \text{ où } R(\theta_j) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}$$

Coro (Version matricielle) : Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPMP$ soit de la forme précédente.

Rq : Dans les cas $n=2$ et $n=3$, on retrouve les classifications connues (cf dev ?)

Df : On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan

DEV 1 - Générateurs de $O(E)$
Soit E un espace euclidien de dimension n
Toute isométrie de E peut s'écrire comme la composée de p réflexions pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$

Rq : Pratique pour classifier les isométries affines
Appli : Classification en dimension 2 et 3

3) Réduction des endomorphismes autoadjoints

Notation : $S_n^{++}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Th : Soit f un endomorphisme autoadjoint de E (euclidien)
Alors il existe une base orthonormée B de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels positifs tel que

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Coro (Version matricielle / Th. spectral) : Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$
Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels tel que

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Rq : Si $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, le spectre de M est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la réduction sont donc strictement positifs.

Cor (Pseudo-réduction simultanée)
Soient $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels positifs tel que
$P^{-1}MP = I_n$ et $P^{-1}NP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Appli : Soit ϕ une forme quadratique définie positive et ψ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.
Alors il existe une base de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall x = (x_i)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$
$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$.

Appli : Log-convexité du déterminant et ellipsoïde de John

III Application à la topologie de $G_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle $|||\cdot|||$: c'est un espace de Banach.

Lemme : Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Alors $\exists ! N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $N^2 = M$ (la racine carrée de M)
~~Conséquence du dev 2 !~~ ($N = \exp(\frac{1}{2}M)$)

Prop – Décomposition polaire : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$
M s'écrit de manière unique sous la forme
$M = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Pptés : Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact (de $M_n(\mathbb{R})$)

Prop : La décomposition polaire est un homéomorphisme de $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Ppté : $O_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes :
$SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$

Rq : Via la réduction de $O_n(\mathbb{R})$ et par convexité par arcs.

$\boxed{\text{DEV 2}}$

exp : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Def : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$
On appelle exponentielle de M la somme de la série normalement convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$

Ppté : $\cdot$ $\exp(M)$ est un polynôme en M
$\cdot$ Si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $e^{PMP^{-1}} = P e^{M} P^{-1}$
$\cdot$ $e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \\ & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$
$\cdot$ $\exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ est continue.

(*) Projection orthogonale
(et procédé de Gram-Schmidt)

) Borné avec $|||\cdot|||_2$ car si $M \in O_n(\mathbb{R})$

$|||M|||_2 = \sqrt{\sum_{\lambda \in Sp} \lambda} \leq \sqrt{n}$ car $|\lambda| \leq 1$ pour $M \in O_n$

Références

[Gou] : GOURDON Algèbre

[Gri] : GRIFONE

[M-T] : MNEIMNE-TESTARD

[Aud] : AUDIN