Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Application en dimension 2 et 3

Soient E un espace affine réel euclidien de dimension n, dirigé par $\vec{E}$ et muni d'un produit scalaire $\langle\,,\rangle$ qui définit une distance d.

I Généralités

1) Définitions et premières propriétés

Déf : Une application affine $\varphi : E \to E$ est une isométrie affine si $\forall (A,B) \in E^2$, $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A,B)$.
Une application linéaire $f : E \to E$ est une isométrie linéaire si $\forall u \in E$, $\|f(u)\| = \|u\|$.

Rpté : φ est une isométrie affine ssi $\vec{\varphi}$ son application linéaire associée est une isométrie vectorielle.
• f est une isométrie vectorielle ssi $\forall (u,v) \in E^2$, $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ ssi $\exists \mathcal{B}$ base de E tel que si $Mat_{\mathcal{B}}(f) = M$, ${}^tMM = M{}^tM = I_n$ ($M \in O_n(\mathbb{R})$)

Notation : On note $Isom(E)$ l'ensemble des isométries affines, $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles.

Propo : $(O(E), \circ)$ et $(Isom(E), \circ)$ sont des groupes.
Coro : Une isométrie est une bijection.
Ex : Les translations sont des isométries (affines).
Les symétries orthogonales sont des isométries (vectorielles) (*)

Déf : Une isométrie affine φ est un déplacement si son déterminant (ie celui de $\vec{\varphi}$) est positif.
Sinon, on parle d'anti-déplacement.

Déf/Rpté : L'ensemble des déplacements (resp. antidéplacements) est noté $Isom^+(E)$ (resp. $Isom^-(E)$).
$Isom^+(E)$ est un sous-groupe de $Isom(E)$.
~~Appli : $Isom^+(E)$ préservent l'orientation.~~
~~Rpté : $det(\varphi) = 1$~~

2) Forme réduite et générateurs de $Isom(E)$

Lemme : Soit $\varphi \in Isom(E)$. Alors
$$E = Ker(\vec{\varphi} - Id_E) \oplus Im(\vec{\varphi} - Id_E)$$

Th - Forme réduite : Soit $\varphi \in Isom(E)$. Alors il existe un unique couple $(v, \psi) \in E \times Isom(E)$ tq :
- $\varphi = t_v \circ \psi$ où t_v désigne la translation de vecteur v.
- l'espace affine des points fixes de ψ est non vide
- le vecteur v est dans F, la direction de F

De plus, $t_v \circ \psi = \psi \circ t_v$ et $F = Ker(\vec{\varphi} - Id_E)$

Appl/Ex : ?

Déf : On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.
Rq : Ce sont donc des isométries vectorielles.

Propo : Toute isométrie vectorielle peut s'écrire comme composée de p réflexions où $p \le n$.
Rq : par récurrence sur n et via F stable par $f \Rightarrow F^\perp$ stable par f. D'abord cas $f(x) = x$ puis sinon on s'y ramène.

Propo : Toute isométrie affine peut s'écrire comme composée de p réflexions où $p \le n+1$

Rq : On se ramène au cas affine ! Cas A pt fixe puis pt fixe.

Thm : Les réflexions engendrent le groupe des isométries.
Rq : Va servir pour les classifications.

Rq : On peut rendre arbitrairement grand le nombre de réflexions ! $s_H \circ s_H \circ f = f$! Réflexion contrôle pas la parité.

Rpté : $\varphi \in Isom(E) \Leftrightarrow$ le nombre de réflexions dans la déc est pair
Coro : $\varphi \in Isom(E) \Rightarrow det(\varphi) = \pm 1$ et $\varphi \in Isom^-(E) \Rightarrow det(\varphi) = -1$
De plus, $Isom^+(E) \triangleleft Isom(E)$ (det, morphisme)

Boule unité

II Réduction des isométries

1) Cas général

Prop : Soit E de dimension 2 et $f \in \mathrm{Isom}^+(E)$.
Alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que f est une rotation d'angle θ.
Ie, $\exists B$ bon de E tq $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
On note cette matrice 2x2 R_θ.

Th : Soit $f \in \mathrm{Isom}(E)$, E de dimension n.
Alors $\exists B$ bon de E tq

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \boxed{R_{\theta_1}} & \\ 0 & & & & & \ddots \; \boxed{R_{\theta_r}} \end{pmatrix}$$

Rq : Démo par récurrence.

Coro : $G_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs
$\mathrm{Isom}^+(E)$ est connexe par arcs (d'où le nom déplacement)

2) Cas n = 2 – Isométries du plan

Isométries vectorielles : On a : si $f \in G(E)$:
- soit $f = \mathrm{Id}$
- soit f est une réflexion de droite ($f \notin G(E)$)
- soit f est une rotation d'angle θ ($f \in G(E)$)

Isométries affines : Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(E)$. Alors
$\vec{\varphi} \in O(E)$ donc $\vec{\varphi} = \mathrm{Id}$, $\vec{\varphi}$ réflexion ou $\vec{\varphi}$ rotation.
- $\vec{\varphi} = \mathrm{Id} \iff \varphi$ translation
- $\vec{\varphi}$ réflexion de droite D : deux cas se présentent
  - φ a un pt fixe A : on vectorialise en A et alors φ est la réflexion par rapport à la droite D
  - φ a pas de pt fixe : via la forme réduite, $\exists v \in D$ tq si s_D la symétrie par rapport à la droite D, alors $\varphi = t_v \circ s_D = s_D \circ t_v$. C'est une symétrie glissée orthogonale. relativement à D, v
- $\vec{\varphi}$ rotation d'angle θ : alors nécessairement, φ a un seul pt fixe A donc φ rotation d'angle θ de pt fixe A notée $\rho_{A,\theta}$

Isom	Droites de la décomposition en réflexion	Pt fixes
Id		
Translation	2 droites parallèles	$\emptyset$
Rotations	2 droites sécantes	Le centre de la rotation
Réflexion	1 droite	La droite de la réflexion
Symétrie glissée	3 droites	$\emptyset$

3) Cas n = 3 – Isométries de l'espace

Isométries vectorielles : Via le th de réduction, si $f \in G(E)$:
- $f \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ie $f = \mathrm{Id}$
- $f \sim \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ie f est une réflexion par rapport à un plan
- $f \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}$ ie f rotation par rapport à un axe
- $f \sim \begin{pmatrix} -1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}$ ie f est une anti-rotation.

Isométries affines : ⚠ Anti-rotation

Déf : On appelle vissage d'axe D et de vecteur v (où $v \in D$) une isométrie $t_v \circ \rho_{D,\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. (cf 3))

Déf : On parle d'anti-rotation affine si $\vec{\varphi}$ est une anti-rotation. (cf 4))

	Plan de la décomposition en réflexion	Points fixes
Id	$\emptyset$	E
Translations	2 plans parallèles	$\emptyset$
Rotations axiales	2 plans sécants 5)	L'axe de la rotation
Vissage	2 plans	$\emptyset$
Réflexion	1 plan	Le plan de la réflexion
Symétries glissées	3 plans	$\emptyset$
Anti-rotation	3 plans	Un point fixe.

III Isométries laissant invariant une partie

1) Cas n=2 - Polygones réguliers et pavages

Def : Soit P_n un polygone régulier à n côtés de centre O.
On note D_n l'ensemble des isométries du plan qui laissent P_n invariant (ie $\forall \varphi \in Isom(E)$, $\varphi(P_n) = P_n$)
D_n est appelé groupe diédral et c'est un groupe

Prop : D_n contient les rotations de centre O et d'angle $\frac{2\pi k}{n}$ où $k \in [0, n-1]$ et les n réflexions par rapport aux droites passant par O et par les sommets de P_n si $n \equiv 1 (2)$ et par les milieux des côtés de P_n si $n \equiv 0 (2)$
Donc $|D_n| = 2n$

Prop : Soit R l'ensemble des rotations de D_n et soit s une réflexion de D_n
Alors : • $R \triangleleft D_n$ et $R \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\langle s \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
• Alors $D_n = R \rtimes \langle s \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ via [illegible]

2) Cas n = 3 - Polyèdres réguliers

Def : On appelle polyèdre régulier un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers isométriques

Rq : Def qui marche en dim 3, on peut pas généraliser.

Prop : Il y a 5 types de polyèdres réguliers : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

Prop : Soit $Isom(T)$, le groupe des isométries laissant invariant un tétraèdre régulier de sommets $ABCD$
Soit $X = \{A, B, C, D\}$
Alors $Isom(T)$ agit sur X et $Isom(T) \simeq \mathfrak{S}_4$

Rq : De même, $Isom^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$

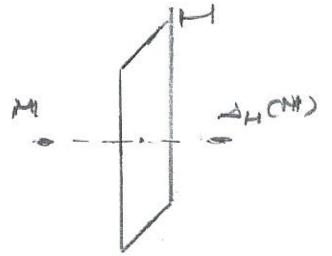
Prop : Soit $Isom^+(C)$, le groupe des déplacements qui laissent invariant un cube de grandes diagonales D_1, D_2, D_3, D_4
Soit $X = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$
Alors $Isom^+(C)$ agit sur X et $Isom(C) \simeq \mathfrak{S}_4$

Rq : On peut aussi montrer que $Isom^+(D) \simeq \mathfrak{A}_5$ (plus dur)

Th : À conjugaison près, dans $SO_3(\mathbb{R})$, il y a 5 types de sous-groupes dans $SO_3(\mathbb{R})$
- les groupes cycliques $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (d'ordre n)
- les groupes diédraux D_n (d'ordre $2n$)
- les groupes de déplacements des polyèdres réguliers qui sont isomorphes à $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_5$.

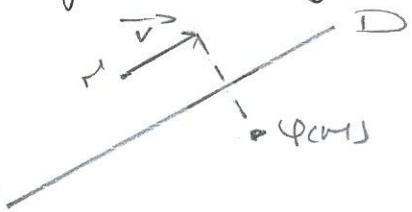
Exemple de réflexion s_H :

1)

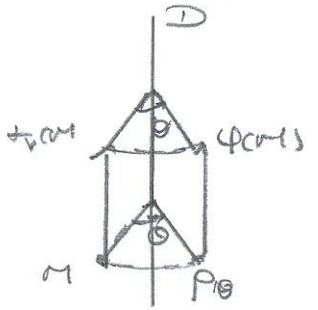


Symétrie glissée orthogonale φ

2)

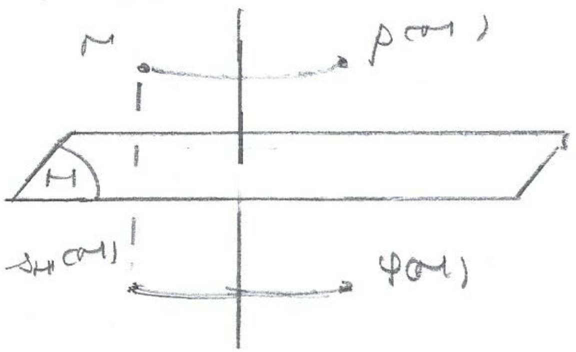


Vissage d'axe D de vecteur $\vec{v}$ φ



3)

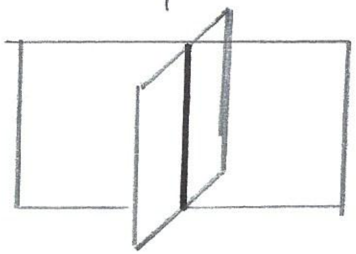
Anti-rotation φ



4)

Décomposition en réflexion d'une rotation :

5)



Références

AUDIN
COMBES
TAUVEL (Géométrie)